

**Stabilität von Schichtenverfahren
bei linearen Evolutionsgleichungen**

Ulrich von Welck

1975



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546702_0012

Stabilität von Schichtenverfahren
bei linearen Evolutionsgleichungen

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der
Doktorwürde der Fakultät für Mathematik
an der Ludwig-Maximilians-Universität
München



vorgelegt von
Ulrich Freiherr von Welck
aus Starnberg
im Dezember 1974



1. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Hämmerlin
2. Berichterstatter: Priv.-Doz. Dr. A. Sachs

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Februar 1975

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Stabilität des Einschichtverfahrens bei zeitlich homogenen Evolutionsgleichungen	
2.1	Sachgemäß gestellte Anfangswertprobleme	5
2.2	Charakterisierung sachgemäß gestellter Anfangswertprobleme	7
2.3	Einschichtverfahren	13
3	Mehrschichtverfahren bei zeitlich inhomogenen Evolutionsgleichungen	
3.1	Zeitlich inhomogene Evolutionsgleichungen	16
3.2	Mehrschichtverfahren	22
4	Das DAHLQUIST'sche Wurzelkriterium bei Mehrschichtverfahren im Falle parabolischer Differentialgleichungen	
4.1	Parabolische Evolutionsgleichungen	27
4.2	Das DAHLQUIST'sche Wurzelkriterium	37
5	Numerische Beispiele	54
	Literatur	61

1. Einleitung

Gegeben sei in einem B-Raum X das sachgemäß gestellte Anfangswertproblem

$$(1) \quad \frac{d}{dt} u(t) = A(t)u(t), \quad t \geq 0,$$

$$(2) \quad u(0) = u_0 \in X,$$

wobei $A(t)$ einen abgeschlossenen linearen Operator in X mit von t unabhängigem dichten Definitionsbereich $D(A(t)) \subset X$ bezeichne. Zahlreiche lineare Anfangs- und Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen lassen sich in dieser Form schreiben.

In der vorliegenden Arbeit werden wir Verfahren folgender Gestalt zur Approximation der Lösung u von (1), (2) untersuchen:

$$(3) \quad u^{n+1} - \sum_{i=0}^N a_i u^{n-i} = hA(t_{n+1})u^{n+1}.$$

Dabei sind die Lösungen u^n der Differenzengleichung (3) die gesuchten Näherungen für u auf den Zeitschichten $t = t_n := nh$, $h > 0$. Die Startwerte $u^0, \dots, u^N$ muß man sich zu Beginn der Rechnung auf andere Weise beschaffen. Wir wollen Verfahren dieser Art "Mehrschichtverfahren" nennen.

Die Berechnung von u^{n+1} aus der impliziten Gleichung (3) wird im allgemeinen nur angenähert möglich sein. Trotzdem ist es sinnvoll, Mehrschichtverfahren zu untersuchen, da auf diese Weise die Konstruktion eines konvergenten Verfahrens für das Anfangswertproblem (1), (2) in zwei Schritte unterteilt werden kann. Erster Schritt: Konstruktion eines konvergenten Mehrschichtverfahrens; zweiter Schritt: Konstruktion eines konvergenten Verfahrens zur Lösung der Gleichung (3). Diese Vorgehensweise gestattet es, die Eigenschaften der Evolutionsgleichung (1) besser auszunutzen, als es bei den üblicherweise verwendeten Diskretisierungs-

verfahren möglich ist.

Die Konvergenz der Mehrschichtverfahren läßt sich im Rahmen der LAX - RICHTMYER - Theorie behandeln. Es wird also unser Hauptinteresse sein, Stabilitätskriterien für Schichtenverfahren zu gewinnen. Da konvergente Verfahren für (1), (2) bekanntlich auch stabil konvergent sind, ist es tatsächlich ausreichend, die Lösungen von (3) nur angenähert zu berechnen, ohne hierdurch die Konvergenz eines Mehrschichtverfahrens zu zerstören.

Im Spezialfall $N = 0$ und $a_0 = 1$ wurde die Konvergenz des so entstehenden "Einschichtverfahrens"

$$(4) \quad u^{n+1} - u^n = hA(t_{n+1})u^{n+1}$$

bereits für zahlreiche eindimensionale Differentialoperatoren $A(t)$ bewiesen - zuerst von ROTHE [1930] bei eindimensionalen Wärmeleitungsgleichungen -. Ausführliche Literaturangaben dazu sind bei BEREZIN - ZHIDKOV [1965, Kap. 10] und LISKOVETS [1965] zu finden. Da Einschichtverfahren im allgemeinen nur von erster Ordnung konvergieren, wurden Mehrschichtverfahren höherer Konsistenzordnung gelegentlich angegeben. Die meisten sind jedoch instabil und daher divergent.

Wir beweisen in der vorliegenden Arbeit in der Hauptsache zwei Stabilitätssätze. In Abschnitt 2 wenden wir uns zunächst dem Fall zu, daß die Operatoren $A = A(t)$ von t unabhängig sind. Es ist bekannt, daß die verallgemeinerten Lösungsoperatoren $\{E(t)\}$ dann eine Halbgruppe der Klasse (C_0) bilden. Der infinitesimale erzeugende Operator A_0 dieser Halbgruppe hängt eng mit dem Operator A zusammen; beide Operatoren stimmen auf dem Raum $D_0 := \{u_0 \in X \mid AP(1), (2) \text{ lösbar}\} \subset X$ überein und es gilt $\overline{A}D_0 = A_0$ (Satz 2.7). Die Frage nach der Stabilität des Einschichtverfahrens (4) läßt sich deshalb mit dem Satz von HILLE - YOSIDA - PHILLIPS beantworten. Der Satz liefert die bemerk-

kenswerte Tatsache, daß das Einschichtverfahren im wesentlichen genau dann stabil ist, wenn das dem Operator A zugeordnete Anfangswertproblem (1), (2) sachgemäß gestellt ist (Satz 2.15¹⁾). Ist (1), (2) sachgemäß gestellt, so ist das Einschichtverfahren außerdem konsistent und damit stets konvergent (Korollar 2.16).

In Abschnitt 3 betrachten wir zeitabhängige Operatoren $A(t)$. Zahlreiche Ergebnisse, die im zeitunabhängigen Fall gültig sind, gehen bei diesem Übergang verloren. So hängen die verallgemeinerten Lösungsoperatoren jetzt von zwei Parametern ab und bilden keine Halbgruppen mehr. Außerdem folgt aus der Tatsache, daß (1), (2) sachgemäß gestellt ist, nicht mehr die Stabilität des Einschichtverfahrens (4). Die Umkehrung dieser Aussage bleibt dagegen unter in diesem Zusammenhang üblichen Voraussetzungen gültig, dies ergibt sich aus einer Arbeit von YOSIDA [1965]. Mehrschichtverfahren stimmen formal mit linearen Mehrschrittverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen überein, und die bekannten Konsistenzkriterien lassen sich übertragen (Sätze 3.6 und 3.9). Das DAHLQUIST'sche Stabilitätskriterium scheint sich jedoch in diesem allgemeinen Rahmen nicht beweisen zu lassen.

Wir beschränken uns deswegen auf den Spezialfall gleichmäßig elliptischer Differentialoperatoren in dem B-Raum $X := C(\mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\| \cdot \| := \| \cdot \|_\infty$ und zeigen in Abschnitt 4.1, daß die so entstehenden parabolischen Anfangswertprobleme sachgemäß gestellt sind.

Der Beweis für die Hinlänglichkeit der DAHLQUIST'schen Wurzelbedingung für Stabilität wird in Abschnitt 4.2 geführt.

¹⁾ Sätze und Formeln werden innerhalb jeden Abschnitts fortlaufend numeriert. Bei Verweisen auf Sätze oder Formeln aus anderen Abschnitten wird der Nummer des Verweises die Nummer des Abschnitts vorangestellt, also: Satz 2.9 oder Formel (4.1).

WIDLUND [1966] betrachtet Differenzenoperatoren analoger Bauart zur Approximation der Lösungen des gleichen parabolischen Anfangswertproblems. Seine Beweismethoden lassen sich weitgehend auf unser Problem übertragen. Sie gehen ihrerseits auf Arbeiten von ARONSON [1963a], [1963b] und die grundlegende Arbeit von JOHN [1952] zurück. Unsere Ergebnisse haben den Vorteil, leicht nachzuweisende Voraussetzungen zu besitzen, so daß es ohne weiteres möglich ist, stabile Mehrschichtverfahren höherer Konsistenzordnung explizit anzugeben (Satz 4.27).

In Abschnitt 5 werden drei numerische Beispiele durchgeführt. Betrachtet werden eindimensionale parabolische Rand - Anfangswertprobleme, unter denen sich auch eines mit zeitabhängigen Koeffizienten befindet. Um einen Vergleich mit bekannten Verfahren zu ermöglichen, werden die Beispiele außerdem mit dem Verfahren von KELLER [1971] gerechnet, das bei zeitunabhängigen Koeffizienten von zweiter Ordnung ist.

Herrn Prof. Dr. G. Hämmerlin danke ich für die Förderung und Betreuung dieser Arbeit.

2. Stabilität des Einschichtverfahrens bei zeitlich homogenen Evolutionsgleichungen

2.1 Sachgemäß gestellte Anfangswertprobleme

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein B-Raum, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ ein auf einem dichten Teilraum erklärter linearer Operator in X , und $T := [0, T_0] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall ($T_0 > 0$). Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(1) \quad \frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad t \in T,$$

$$(2) \quad u(0) = u_0.$$

1 Definition:

Eine Abbildung $u : T \rightarrow X$ heißt (klassische) "Lösung" des Anfangswertproblems (1), (2), wenn

$$a. \bigwedge_{t \in T} u(t) \in D(A),$$

$$b. \bigwedge_{t \in T} \lim_{h \rightarrow 0} \|h^{-1}(u(t+h) - u(t)) - Au(t)\| = 0,$$

die Abbildung u somit der Gleichung (1) genügt,

c. die Abbildung die Gleichung (2) erfüllt.

Die Ableitung $\frac{d}{dt}$ in (1) ist also im starken Sinne zu verstehen. Wir setzen

$$D_0 := \{u_0 \in D(A) \mid \text{AP (1), (2) eindeutig lösbar}\}.$$

2 Bemerkung:

Ist $D_0 \neq \emptyset$, so gilt offenbar

a. $D_0 \subset X$ ist linearer Teilraum, und

b. $\bigwedge_{u_0 \in D(A)} (\text{AP (1), (2) lösbar} \Rightarrow u_0 \in D_0).$

3 Definition:

Das Anfangswertproblem (1), (2) heißt "sachgemäß gestellt", wenn D_0 dicht in X liegt und eine Familie $\{E(t) \in B(X) \mid t \in T\}$ linearer beschränkter Operatoren existiert, die folgenden Forderungen genügt:

$$(3) \bigwedge_{u_0 \in D_0} u := E(\cdot)u_0 \text{ Lösung des Anfangswertproblems (1), (2),}$$

$$(4) \bigwedge_{s, t, s+t \in T} E(s+t) = E(s)E(t),$$

$$(5) E(0) = \text{Id},$$

$$(6) \bigvee_{C > 0} \bigwedge_{t \in T} \|E(t)\| < C.$$

Die Operatoren $E(t) \in B(X)$ heißen "verallgemeinerte Lösungsoperatoren", ihre Einschränkungen $E_0(t) := E(t)|_{D_0}$ "Lösungsoperatoren" des Anfangswertproblems (1), (2). Die verallgemeinerten Lösungsoperatoren sind eindeutig bestimmt.

4 Bemerkung:

Unter den Forderungen an ein sachgemäß gestelltes Problem ist (6) die einschneidendste. Sie kann ersetzt werden durch

$$(6') \bigwedge_{u_0 \in X} t \mapsto E(t)u_0 \text{ stetig.}$$

Beweis:

"(6) $\Rightarrow$ (6')": Seien $t \in T$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $v_0 \in D_0$ mit $\|u_0 - v_0\| < \epsilon/4C$ (möglich, da D_0 dicht). Die Abbildung $E(\cdot)v_0$ ist als Lösung von (1), (2) stetig. Es gibt daher ein $\delta > 0$ mit $\|E(t)v_0 - E(t')v_0\| < \epsilon/2$ für alle $t' \in T$ mit $|t - t'| < \delta$. Für $t' \in T$ mit $|t - t'| < \delta$ gilt deswegen

$$\begin{aligned} \|E(t)u_0 - E(t')u_0\| &\leq \|(E(t) - E(t'))(u_0 - v_0)\| + \|(E(t) - E(t'))v_0\| \\ &\leq 2C \cdot \epsilon/4C + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

"(6') $\Rightarrow$ (6)": Verwende das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. **

2.2 Charakterisierung sachgemäß gestellter Anfangswertprobleme

Die Halbgruppeneigenschaft (4) legt eine Erweiterung der Familie der verallgemeinerten Lösungsoperatoren zu einer Halbgruppe $\{E(t) \in B(X) \mid t \in \mathbb{R}_0^+\}$ nahe. Wir werden diese Halbgruppe im folgenden näher untersuchen. Eine für unsere Zwecke ausreichende Darstellung der Halbgruppentheorie ist z.B. bei YOSIDA [1971, Kap. IX] zu finden.

Die auf $\mathbb{R}_0^+$ erweiterte Familie $\{E(t)\}$ bildet eine Halbgruppe der Klasse (C_0) . Dabei geht die Halbgruppeneigenschaft (4) über in

$$(7) \quad \bigwedge_{s,t \in \mathbb{R}_0^+} E(s+t) = E(s)E(t),$$

und die Stetigkeitsaussage (6') bleibt gültig. Außerdem gilt

5 Lemma:

Ist das Anfangswertproblem (1), (2) sachgemäß gestellt, so gibt es Konstanten $M > 0$ und $q > 0$ mit

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}_0^+} \|E(t)\| \leq M e^{qt}.$$

Beweis:

Klar! **

Wir nehmen nun an, daß das Anfangswertproblem (1), (2) sachgemäß gestellt sei, und setzen

$$D(A_0) := \{u_0 \in X \mid \text{es ex. } \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(E(h) - \text{Id})u_0\},$$

$$\bigwedge_{u_0 \in D(A_0)} A_0 u_0 := \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(E(h) - \text{Id})u_0.$$

Der so erklärte Operator A_0 heißt "infinitesimaler erzeugender Operator" (infinitesimal generator) der Halbgruppe $\{E(t)\}_{t \geq 0}$.

6 Satz:

Für den infinitesimalen erzeugenden Operator A_0 einer Halbgruppe der Klasse (C_0) gelten folgende Aussagen:

- a. $D(A_0)$ ist dicht,
- b. A_0 ist abgeschlossen,
- c. $\bigvee_{c>0} \bigwedge_{r>c} R(r, A_0) := (r \text{Id} - A_0)^{-1} \in B(X),$
- d. $\bigwedge_{r>c} \bigwedge_{u_0 \in X} R(r, A_0) u_0 = \int_0^\infty e^{-rt} E(t) u_0 dt.$

Beweis:

Siehe YOSIDA [1971, Kap. IX]. **

Den Zusammenhang zwischen den Operatoren A und A_0 gibt der folgende Satz an.

7 Satz:

Ist das Anfangswertproblem (1), (2) sachgemäß gestellt, dann gilt:

- a. $D_0 = D(A_0) \cap \bigcap_{t \in T} E(t)^{-1} D(A),$
- b. $A|D_0$ ist abschließbar und $\overline{A|D_0} = A_0.$

8 Bemerkung:

Die Tatsache, daß $A|D_0$ abschließbar ist mit $\overline{A|D_0} \subset A_0$, findet man in anderem Zusammenhang bei RICHTMYER-MORTON [1967, S. 49 ff].

Beweis des Satzes:

Aus der Definition von A_0 folgt unmittelbar die Gleichheit a. und die Inklusion $A|D_0 \subset A_0$. Wegen der Abgeschlossenheit von A_0 ist $A|D_0$ somit abschließbar mit $\overline{A|D_0} \subset A_0$. Es bleibt zu zeigen, daß auch $A_0 \subset \overline{A|D_0}$ bzw. $D(A_0) \subset D(\overline{A|D_0})$.

Sei dazu $u_0 \in D(A_0)$ gegeben. Wähle $c > 0$ mit $(c \text{Id} - A_0)^{-1}$

$\in B(X)$ (möglich nach Satz 6c), und setze $B := cId - A|D_0$ und $B_0 := cId - A_0$. Es gilt $D(B) = D(A|D_0) = D_0$, $D(\overline{B}) = D(\overline{A|D_0})$ und $D(B_0) = D(A_0)$. Setze $w_0 := B_0 u_0$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $u_n \in D_0 \cap B_0^{-1}(K(w_0, n^{-1}))$, wobei $K(w_0, r)$ die Kugel um w_0 mit dem Radius r sei. Wegen der Stetigkeit von B_0^{-1} folgt $u_n \rightarrow u_0$. Außerdem gilt nach Konstruktion $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(B)$ und $Bu_n = B_0 u_n \rightarrow w_0$. Insgesamt folgt $u_0 \in D(\overline{B})$. **

Ist ein abgeschlossener linearer Operator infinitesimaler erzeugender Operator einer Halbgruppe der Klasse (C_0) , so sagt man, daß er diese Halbgruppe "erzeuge". Wir geben eine bekannte Charakterisierung solcher Operatoren an:

9 Satz (HILLE-YOSIDA-PHILLIPS):

Ein linearer Operator A in X erzeugt genau dann eine Halbgruppe der Klasse (C_0) , wenn

- A abgeschlossen, $D(A)$ dicht,
- $\bigvee_{q>0} \bigwedge_{r>q} R(r, A) = (rId - A)^{-1} \in B(X)$,
- $\bigvee_{C>0} \bigvee_{0<h_0<q^{-1}} \bigwedge_{0<h<h_0} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}_0} \| (Id - hA)^{-n} \| < C(1 - qh)^{-n}$,

Beweis:

Siehe YOSIDA [1971, Kap. IX.7]. **

Satz 9 liefert eine im Hinblick auf das Schichtenverfahren wichtige Charakterisierung sachgemäß gestellter Anfangswertprobleme bei Evolutionsgleichungen:

10 Satz:

Das einem linearen Operator A mit $D(A) \subset X$ zugeordnete Anfangswertproblem (1), (2) ist genau dann sachgemäß gestellt, wenn

- $A|D_0$ abschließbar, D_0 dicht,

- b. $\bigvee_{q \geq 0} \bigwedge_{r > q} r \in \rho(A|D_0) \quad (\text{Resolventenmenge}),$
 c. $\bigvee_{C > 0} \bigvee_{0 < h_0 \leq q^{-1}} \bigwedge_{0 \leq h < h_0} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}_0} nh \in T \Rightarrow \|(\text{Id} - h\overline{A}T\overline{D}_0)^{-n}\| < C.$

11 Bemerkung:

Die Operatoren $(\text{Id} - h\overline{A}T\overline{D}_0)^{-1}$ sind die eindeutig bestimmten stetigen Fortsetzungen von $(\text{Id} - hA|D_0)^{-1}$ auf den ganzen Raum X , so daß insbesondere die Produkte $(\text{Id} - h\overline{A}T\overline{D}_0)^{-n}$ erklärt sind. Dies ergibt sich aus Lemma 12, das wir dem Beweis des Satzes voranstellen.

12 Lemma:

Sei A ein abschließbarer Operator mit dichtem Definitionsbereich $D(A) \subset X$. Dann gilt $\rho(A) = \rho(\overline{A})$, und die Resolventen $R(r, \overline{A})$ sind für alle $r \in \rho(A) = \rho(\overline{A})$ die eindeutig bestimmten stetigen Fortsetzungen der $R(r, A)$ auf den ganzen Raum X .

Beweis:

Sei zunächst $r \in \rho(A)$. Wir zeigen hierfür

1. $R(r\text{Id} - \overline{A}) = X$: Sei dazu $w \in X$ beliebig vorgegeben. Wähle $\{w_n\} \subset R(r\text{Id} - A)$ (dicht!) mit $w_n \rightarrow w$. Setze $u_n := R(r, A)w_n$. Wegen der Stetigkeit von $R(r, A)$ konvergiert die Folge $\{u_n\} \subset D(A)$ gegen ein $u \in X$. Es gilt also $u_n \rightarrow u$ und $w_n = (r\text{Id} - A)u_n \rightarrow w$, und damit $u \in D(\overline{r\text{Id} - \overline{A}}) = D(\overline{A})$ sowie $w = (\overline{r\text{Id} - \overline{A}})u = (r\text{Id} - \overline{A})u \in R(r\text{Id} - \overline{A})$. *

2. $r\text{Id} - \overline{A}$ ist injektiv: Sei dazu $u \in D(\overline{A})$ mit $(r\text{Id} - \overline{A})u = 0$. Es gibt dann eine Folge $\{u_n\} \subset D(A)$ mit $u_n \rightarrow u$ und $w_n := (r\text{Id} - A)u_n \rightarrow 0$. Wegen der Stetigkeit von $R(r, A)$ folgt $u = \lim u_n = \lim R(r, A)w_n = 0$. *

Der Operator $R(r, \overline{A}) := (r\text{Id} - \overline{A})^{-1}$ ist also auf dem ganzen Raum X erklärt. Es bleibt zu zeigen:

3. $R(r, \overline{A})$ ist stetig: Sei dazu $\{w_n\} \subset X$ eine gegen

O konvergente Folge. Setze $u_n := R(r, \bar{A})w_n \in D(\bar{A})$ und wähle zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $u'_n \in K(u_n, 1/n) \cap D(A)$ mit $w'_n := (rId - A)u'_n \in K(w_n, 1/n)$. Dann gilt natürlich auch $w'_n \rightarrow 0$ und $u'_n = R(r, A)w'_n \rightarrow 0$. Es folgt $u_n \rightarrow 0$. *

Insgesamt folgt $r \in \rho(\bar{A})$, und $R(r, \bar{A})$ ist die (eindeutig bestimmte) stetige Fortsetzung von $R(r, A)$ auf den ganzen Raum X .

Wir müssen noch nachweisen, daß $\rho(\bar{A}) \subset \rho(A)$. Aus dem bereits bewiesenen Teil des Lemmas folgt $R(r, \bar{A}) \in B(X)$ und speziell $R(rId - \bar{A}) = X$ für $r \in \rho(\bar{A})$. Außerdem gilt $R(r, A) = R(r, \bar{A})|R(rId - A)$. Es genügt also zu zeigen, daß $R(rId - A)$ dicht in X liegt. Dies ergibt sich aber unmittelbar aus der Tatsache, daß der Operator $rId - A$ abschließbar ist und $R(\overline{rId - A}) = R(rId - \bar{A}) = X$. **

Beweis des Satzes:

Die Notwendigkeit der angegebenen Bedingungen ergibt sich aus den Sätzen 7 und 9 sowie Lemma 12. *

Beim Beweis der Hinlänglichkeit folgt mit Hilfe von Lemma 12 zunächst, daß $\overline{ATD}_0$ den Forderungen a. und b. des Satzes 9 genügt. Um zu zeigen, daß auch c. erfüllt ist, sei $0 < h < h_0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Wir zerlegen n in der Form $n = k[\frac{T_0}{h}] + m$ mit $k, m \in \mathbb{N}_0$ und $mh \in T$. Es folgt (o.E.d.A. sei $h_0 < T_0$)

$$\|(Id - h\overline{ATD}_0)^{-n}\| < C^{k+1} \leq C^{C_1nh+1} = C e^{C_2nh}$$

mit geeigneten Konstanten $C_1, C_2 > 0$. Wird q gegebenenfalls noch vergrößert, so können wir weiter abschätzen:

$$\|(Id - h\overline{ATD}_0)^{-n}\| < C e^{C_2nh} \leq C(1 - hq)^{-n}.$$

Der Operator $\overline{ATD}_0$ erzeugt also eine Halbgruppe $\{E(t)\}_{t \geq 0}$ der Klasse (C_0) , wobei die Operatoren $\{E(t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ gerade die gesuchten verallgemeinerten Lösungsoperatoren des Anfangswertproblems (1), (2) sind. **

13 Korollar:

Das einem linearen Operator A mit dichtem Definitionsbereich $D(A) \subset X$ zugeordnete Anfangswertproblem (1), (2) ist genau dann sachgemäß gestellt, wenn D_0 dicht und $A|_{D_0}$ abschließbar ist, und der abgeschlossene Operator $\overline{A}|_{\overline{D_0}}$ eine Halbgruppe $\{E(t)\}$ der Klasse (C_0) erzeugt. Die Operatoren $\{E(t)\}$ sind dabei gerade die verallgemeinerten Lösungsoperatoren.

Beweis:

Klar! **

Der Vollständigkeit halber geben wir noch folgendes Korollar an:

14 Korollar:

Erzeugt ein abgeschlossener linearer Operator A mit dichtem Definitionsbereich $D(A) \subset X$ eine Halbgruppe $\{E(t)\}$ der Klasse (C_0) , so ist das zugeordnete Anfangswertproblem (1), (2) sachgemäß gestellt. Die Operatoren $\{E(t)\}$ sind dabei gerade die verallgemeinerten Lösungsoperatoren.

Beweis:

Es genügt zu zeigen, daß das Anfangswertproblem (1), (2) mit $u_0 := 0$ nur die triviale Lösung besitzt ($\Rightarrow \emptyset \neq D_0 = D(A)$). Sei also u eine beliebige Lösung. Setze $w(s) := E(t-s)u(s)$ für $0 \leq s \leq t$. Dann folgt $\frac{d}{ds}w(s) = -AE(t-s)u(s) + E(t-s)Au(s) = 0$ und $u(t) = w(t) - w(0) = \int_0^t \frac{d}{ds}w(s) ds = 0$. **

2.3 Einschichtverfahren

Wir wollen nun das Einschichtverfahren erklären. Dazu setzen wir voraus, daß das Anfangswertproblem (1), (2) sachgemäß gestellt sei. Gemäß Satz 7 ist dann der Operator $A|D_0$ abschließbar, und es gilt $\overline{A|D_0} = A_0$. Das Einschichtverfahren besteht aus folgendem Einschnittverfahren ($h > 0$ hinreichend klein!):

$$(8) \quad h^{-1}(u^{n+1} - u^n) = A_0 u^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$(9) \quad u^0 = u_0,$$

oder explizit:

$$(10) \quad \begin{aligned} u^{n+1} &= C(h)u^n := (\text{Id} - hA_0)^{-1}u_n \\ &= C(h)^{n+1}u_0 \end{aligned}$$

In (8) verwenden wir $A_0 = \overline{A|D_0}$ an Stelle von A um sicherzustellen, daß die Operatoren $\{C(h)\}$ auf dem ganzen Raum X erklärt sind (beachte Bemerkung 11). Wie wir sehen, garantiert Satz 10 gerade die Stabilität der Operatoren $\{C(h)\}$ im Sinne von LAX-RICHTMYER [1956] (siehe auch RICHTMYER-MORTON [1967]). Wir erhalten als Hauptergebnis dieses Abschnitts

15 Satz:

Das einem linearen Operator A mit $D(A) \subset X$ zugeordnete Anfangswertproblem (1), (2) ist genau dann sachgemäß gestellt, wenn gilt:

- $A|D_0$ abschließbar, D_0 dicht,
- $\bigvee_{q \geq 0} \bigwedge_{r > q} \quad r \in \rho(A|D_0),$
- die Operatoren $C(h) := (\text{Id} - h\overline{A|D_0})^{-1} \in B(X)$ sind stabil.

Beweis:

Klar! **

16 Bemerkung:

Dem Satz 15 entnehmen wir, daß die Stabilitätsforderung beim Einschichtverfahren im wesentlichen zu der Forderung an das Anfangswertproblem (1), (2) führt, sachgemäß gestellt zu sein. Schichtenverfahren scheinen deswegen natürliche Verfahren für Anfangswertprobleme mit Evolutionscharakter zu sein. In Abschnitt 5 werden wir sehen, daß sie bei numerischen Berechnungen tatsächlich sehr gute Ergebnisse liefern.

17 Korollar:

Ist das Anfangswertproblem (1), (2) sachgemäß gestellt, dann sind die Operatoren $\{C(h)\}$ konsistent (auf $D(A_0^2)$) und stabil, mithin konvergent. Die Konvergenz ist gleichmäßig in $t \in T$, und für $u_0 \in D(A_0^2)$ zusätzlich von der Ordnung $O(h)$.

Beweis:

1. Konsistenz: Sei $u_0 \in D(A_0^2)$. Dann gilt:

$$\left\| \frac{d}{dt} E(t)u_0 \right\| = \|E(t)A_0^2 u_0\| \leq C e^{qt} \|A_0^2 u_0\|$$

und damit

$$\begin{aligned} \| \{C(h) - E(h)\} E(t)u_0 \| &= \| C(h) E(t) \{E(h) - \text{Id} - hA_0 E(h)\} u_0 \| \\ &\leq C \| \{E(h) - \text{Id} - hA_0 E(h)\} u_0 \| \\ &\leq C (\| \{E(h) - \text{Id} - hA_0\} u_0 \| + h \| \{E(h) - \text{Id}\} A_0 u_0 \|) = o(h). \end{aligned}$$

Bei der Herleitung der Ungleichungen haben wir mehrmals davon Gebrauch gemacht, daß $A_0 E(t)u_0 = E(t)A_0 u_0$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $u_0 \in D(A_0)$, siehe YOSIDA [1971, Kap. IX.3]. Außerdem müssen wir noch anmerken, daß der Raum $D(A_0^2) \subset D(A_0)$ dicht in X liegt, siehe hierzu HILLE-PHILLIPS [1957, Satz 10.3.4]. *

2. Konvergenz: Da die Operatoren $\{C(h)\}$ nach Satz 15

stabil sind, ergibt sich die Konvergenz des Einschichtverfahrens aus dem Äquivalenzsatz von LAX. Die Tatsache, daß die Konvergenz linearer Einschnittverfahren auf kompakten Intervallen gleichmäßig und auf der Konsistenzmenge (hier $D(A_0^2)$) von der Ordnung $O(h)$ ist, ist bekannt (siehe z.B. RICHTMYER-MORTON [1967, Kap. 3]). **

Korollar 17 liefert einen bekannten Darstellungssatz für Halbgruppen linearer Operatoren (vgl. HILLE-PHILLIPS [1957, Satz 11.6.6]):

18 Korollar:

Der abgeschlossene lineare Operator A sei der infinitesimale erzeugende Operator der Halbgruppe $\{E(t)\}_{t \geq 0}$ der Klasse (C_0) . Dann gilt:

$$(11) \quad \bigwedge u \in X \bigwedge t \in \mathbb{R}_0^+ \quad E(t)u = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Id} - \frac{t}{n} A)^{-n} u.$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall $R \subset \mathbb{R}_0^+$, und für $u \in D(A^2)$ zusätzlich von der Ordnung $O(n^{-1})$.

Beweis:

Das dem Operator A zugeordnete Anfangswertproblem ist nach Korollar 14 sachgemäß gestellt. Die Behauptung folgt somit unmittelbar aus Korollar 17. **

3. Mehrschichtverfahren bei zeitlich inhomogenen Evolutionsgleichungen

3.1 Zeitlich inhomogene Evolutionsgleichungen

Die Überlegungen des letzten Abschnitts nutzten wesentlich die zeitliche Homogenität der Evolutionsgleichung (2.1) aus. Es konnte gezeigt werden, daß unter dieser Voraussetzung das Anfangswertproblem (2.1), (2.2) im wesentlichen genau dann sachgemäß gestellt ist, wenn das Einschichtverfahren (2.8) bzw. (2.10) stabil ist und konvergiert (Satz 2.15). Werden zeitabhängige Operatoren $A(t)$ zugelassen, so geht die eine Richtung dieser Aussage verloren. Es kann nurmehr von der Stabilität darauf geschlossen werden, daß das Anfangswertproblem sachgemäß gestellt ist. Die Stabilität muß gesondert nachgewiesen werden.

Sei $(X, \|\cdot\|)$ wieder ein B -Raum, $T := [0, T_0]$, $T_0 > 0$, und sei $\{A(t)\}_{t \in T}$ eine Familie abgeschlossener linearer Operatoren in X , die alle den gleichen dichten Definitionsbereich $D \subset X$ besitzen:

$$\bigwedge_{t \in T} A(t) : D = D(A(t)) \rightarrow X.$$

Setze $T_s := [s, T_0]$ für $0 \leq s < T_0$. Wir erhalten die Anfangswertprobleme

$$(1_s) \quad \frac{d}{dt}u(t) = A(t)u(t), \quad t \in T_s$$

$$(2_s) \quad u(s) = u_s,$$

und fordern, daß die zeitlich homogenen Probleme

$$(3_s) \quad \frac{d}{dt}u(t) = A(s)u(t), \quad t \in T_s; \quad u(s) = u_s$$

sachgemäß gestellt seien. Außerdem sei die Bedingung

$$(4) \quad \bigvee_{r_0 \geq 0} (r_0, +\infty) \subset \bigcap_{t \in T} \rho(A(t))$$

erfüllt. Hierdurch wird die Existenz der Operatoren

$C_b(t, h) := (\text{Id} - bhA(t))^{-1}$ für hinreichend kleine $h > 0$ sichergestellt:

$$\bigwedge_{b>0} \bigvee_{h_0>0} \bigwedge_{0<h<h_0} \bigwedge_{t \in T} C_b(t, h) \in B(X).$$

Die verallgemeinerten Lösungsoperatoren der zeitlich homogenen Probleme (3_s) bezeichnen wir mit $E_s(t)$. Außerdem setzen wir

$$\bigwedge_{0 \leq s < T_0} D_s := \{u_s \in X \mid AP(1_s), (2_s) \text{ eindeutig lösbar} \}^1).$$

1 Definition:

Die Anfangswertprobleme heißen "sachgemäß gestellt", wenn die D_s für alle $0 \leq s < T_0$ dicht in X liegen und eine Familie $\{E(t, s) \in B(X) \mid s, t \in T\}$ beschränkter linearer Operatoren existiert, die folgenden Forderungen genügt:

$$(5) \quad \bigwedge_{0 \leq s < T_0} \bigwedge_{u_s \in D_s} u := E(\cdot, s)u_s \quad \text{Lösung des Anfangswertproblems } (1_s), (2_s)^1,$$

$$(6) \quad \bigwedge_{0 \leq r \leq s \leq t \leq T_0} E(r, r) = \text{Id}, \quad E(t, r) = E(t, s)E(s, r),$$

$$(7) \quad \bigvee_{C > 0} \bigwedge_{0 \leq s \leq t \leq T_0} \|E(t, s)\| < C.$$

Die Operatoren $\{E(t, s)\}$ werden wieder "verallgemeinerte Lösungsoperatoren" genannt.

Das Einschichtverfahren (2.8), (2.9) bzw. (2.10) geht über in $(t_n := nh)$

$$(8) \quad h^{-1}(u^{n+1} - u^n) = A(t_{n+1})u^{n+1},$$

$$(9) \quad u^0 = u_0,$$

oder explizit $(C(t, h) := C_1(t, h))$

$$(10) \quad u^{n+1} = C(t_{n+1}, h)u^n = \prod_{i=1}^{n+1} C(t_i, h)u_0.$$

Als Stabilitätsbedingung für die Operatoren $\{C(t, h)\}$ for-

¹⁾ Die Lösungen von (1_s) , (2_s) werden analog zur Definition 2.1 erklärt.

dert man bei zeitlich inhomogenen Problemen bekanntlich

$$(11) \quad \bigvee_{C>0} \bigwedge_{0 \leq n \leq n_0} \bigwedge_{0 \leq m \leq n, n, m \in \mathbb{N}} \left\| \prod_{i=m}^n C(t_i, h_i) \right\| < C$$

(vgl. z.B. ANSORGE-HASS [1970, §6.3]). Mit den so erklärten Begriffen eines sachgemäß gestellten Problems und der Stabilität ist der Äquivalenzsatz von LAX auch für zeitlich inhomogene Anfangswertprobleme der Gestalt (1_s) , (2_s) gültig.

YOSIDA [1965] zeigte, daß eine etwas stärkere Forderung als die Stabilitätsbedingung (11) hinlänglich für die Existenz verallgemeinerter Lösungsoperatoren ist. Um zusätzlich die eindeutige Lösbarkeit des Problems (1_s) , (2_s) zu erhalten, werden wir an Stelle von (11) allerdings $\|C(t, h)\| \leq e^{qh}$ fordern. Der folgende Satz entspricht der Richtung " $\Leftarrow$ " von Satz 2.15.

2 Satz:

Seien die Operatoren $\{A(t)\}$ abgeschlossen, sei (4) erfüllt mit $[r, +\infty) \subset \rho(A(t))$ und gelte

$$(12) \quad \bigwedge_{s, t \in T} D := D(A(s)) = D(A(t)),$$

$$(13) \quad \bigvee_{q>0} \bigwedge_{0 < h \leq r^{-1}} \bigwedge_{t \in [0, T_0 - h]} \|C(t, h)\| \leq e^{qh},$$

(14) für alle $u \in X$ ist die Abbildung

$$(t-s)^{-1}B(t, s)u := (t-s)^{-1}((r\text{Id}-A(t))(r\text{Id}-A(s))^{-1}-\text{Id})u$$

gleichmäßig stetig in $s, t \neq s^{-1}$,

(15) für alle $u \in X$ existiert der Grenzwert

$$B(t)u := \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}B(t, t-h)u$$

gleichmäßig in $t \in T$,

$$(16) \quad \bigvee_{C>0} \bigwedge_{s \neq t} \|(t-s)^{-1}B(t, s)\| \leq C.$$

Dann sind die Anfangswertprobleme (1_s) , (2_s) sachgemäß gestellt mit $D_s = D$ für alle $0 \leq s < T_0$. Darüber hinaus

¹⁾ Beachte, daß $A(t)(r\text{Id}-A(s))^{-1} \in B(X)$ nach dem Graphensatz (closed graph theorem).

gilt für die verallgemeinerten Lösungsoperatoren

$$(17) \quad \bigwedge_{u \in X} \quad E(t, s)u = \lim_{h \rightarrow 0} U_h(t, s)u$$

gleichmäßig in s und t , wobei

$$U_h(t, s) := \begin{cases} E_{t_k}(t-s) & \text{falls } t_k = t_s, \\ E_{t_k}(t-t_k) \left(\prod_{i=1}^{k-1} E_{t_i}(h) \right) E_{t_1}(t_{l+1}-s) & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit $k = k(h) := [t/h]$ und $l = l(h) := [s/h]$.

Beweis:

Sei o.E.d.A. $r = q = 0$ (ersetze sonst die Operatoren $A(t)$ durch $A(t) - (r+q)\text{Id}$). Aus YOSIDA [1971, Kap. XIV.4, Satz 1]¹⁾ folgt, daß die durch (17) erklärten Abbildungen $E(\cdot, s)u_0$ für $u_0 \in D$ Lösungen von (1_s) , (2_s) sind, die auch den übrigen Forderungen genügen. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus KATO [1953, Satz 1]. Wir geben den Beweis der Vollständigkeit halber an:

Sei u eine Lösung von (1_s) , (2_s) zum Anfangswert $u_s = 0$, und sei $t \in [s, T_0)$ beliebig. Da u der Differentialgleichung (1_s) genügt, gilt $\|u(t+h) - u(t) - hA(t)u(t)\| = o(h)$ ($h \rightarrow 0+$). Es folgt $\|u(t+h)\| \leq \|(\text{Id} + hA(t))u(t)\| + o(h) = \|(\text{Id} - h^2A(t)^2)(\text{Id} - hA(t))^{-1}u(t)\| + o(h) \leq \|u(t)\| + o(h)$ ($h \rightarrow 0+$), also

$$\bigwedge_{t \in [s, T_0)} \quad D^+ \|u(t)\| := \overline{\lim}_{h \rightarrow 0+} \frac{\|u(t+h)\| - \|u(t)\|}{h} \leq 0.$$

Wegen der Stetigkeit von $\|u(\cdot)\|$ erhalten wir $\|u(t)\| \leq \|u(s)\| = 0$ für alle $t \in T_s$. **

3 Bemerkung:

Die Forderung (12) ist sehr einschneidend. KATO [1956] gibt

¹⁾ YOSIDA [1971, Kap. XIV.4] behandelt den Spezialfall $\|C(t, h)\| \leq 1$. Die Beweise vereinfachen sich dabei gegenüber YOSIDA [1965] jedoch nicht.

folgende - jedoch nicht sehr viel weiter reichende - Abschwächung an:

(12') Es existiert eine Familie invertierbarer beschränkter und stetig nach t (stark) differenzierbarer Operatoren $\{R(t) \in B(X)\}_{t \in T}$ mit $R^{-1}(t) \in B(X)^{-1}$, so daß die Operatoren $R(t)A(t)R^{-1}(t)$ von t unabhängige Definitionsbereiche besitzen.

KATO und TANABE [1962] zeigen, daß auf die Forderung (12) verzichtet werden kann, wenn die Halbgruppen $\{E_s(t)\}$ analytisch sind. Wir werden hierauf nicht weiter eingehen.

Für Konsistenzbetrachtungen benötigen wir

4 Lemma:

Seien sämtliche Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt und gelte zusätzlich

$$(18) \quad \bigvee C > 0 \quad \bigwedge_{s, t \in T} \|A^2(t)A^{-2}(s)\| \leq 1 + C|t - s|^{-1}.$$

Dann ist für alle $u_s \in D(A^2(s))$ die Ableitung $\frac{d}{dt}U(t, s)u_s$ gleichmäßig LIPSCHITZ-beschränkt:

$$(19) \quad \bigwedge_{t_1, t_2 \in T_s} \left\| \frac{d}{dt_1}U(t_1, s)u_s - \frac{d}{dt_2}U(t_2, s)u_s \right\| \leq C\|A^2(s)u_s\||t_1 - t_2|.$$

Dabei ist $C > 0$ eine von u_s unabhängige Konstante.

Beweis:

Sei wieder o.E.d.A. $r = q = 0$. Setze

$$W(t, s) := A(t)U(t, s)A^{-1}(s) \in B(X) \quad \text{und} \quad w(t, s) := W(t, s)A(s)u_s$$

Es folgt $(t_1 > t_2)$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt_1}U(t_1, s)u_s - \frac{d}{dt_2}U(t_2, s)u_s \right\| &= \|w(t_1, s) - w(t_2, s)\| \\ &\leq \|\{W(t_1, t_2) - U(t_1, t_2)\}w(t_2, s)\| + \|\{U(t_1, t_2) - \text{Id}\}w(t_2, s)\|. \end{aligned}$$

¹⁾ $A^m(t) := A(t)^m$ für $m \in \mathbb{Z}$.

Aus dem Beweis von YOSIDA [1971, Kap. XIV.4, Satz 1] ergibt sich unmittelbar folgende Abschätzung für den ersten Term:

$$\begin{aligned} \|(W(t_1, t_2) - U(t_1, t_2))w(t_2, s)\| &\leq (t_2 - t_1) C e^{(t_2 - t_1)C} \|w(t_2, s)\| \\ &\leq (t_2 - t_1) C e^{(T_0 + t_2 - t_1)C} \|A(s)u_s\|, \end{aligned}$$

dabei ist $C > 0$ die Konstante aus (16). Setze

$$W_h(t, s) := A(t)U_h(t, s)A^{-1}(s) \in B(X) \quad \text{und} \quad w_h(t, s) := W_h(t, s)A(s)u_s.$$

Es gilt (siehe YOSIDA [1971, a.a.O]) $w(t, s) = \lim_{h \rightarrow 0} w_h(t, s)$ und

$$\begin{aligned} \| (U(t_1, t_2) - \text{Id}) w_h(t_2, s) \| &\leq |t_1 - t_2| \sup_{t_2 \leq \tau \leq t_1} \left\| \frac{d}{d\tau} U(\tau, t_2) w_h(t_2, s) \right\| \\ &= |t_1 - t_2| \sup_{t_2 \leq \tau \leq t_1} \| W(\tau, t_2) A(t_2) w_h(t_2, s) \| \\ &\leq |t_1 - t_1| e^{CT_0} \| A(t_2) w_h(t_2, s) \| \\ &\leq |t_2 - t_1| e^{CT_0} \| A^2(t_2) U_h(t_2, s) A^{-2}(s) \| \| A^2(s) u_s \|. \end{aligned}$$

Die Beschränktheit der Operatoren $A^2(t_2)U_h(t_2, s)A^{-2}(s)$ ergibt sich durch zweimalige Anwendung des Graphensatzes (closed graph theorem). Wir müssen darüber hinaus noch zeigen, daß die Operatoren eine von s , t_2 und h unabhängige Schranke besitzen. Dies geschieht aber mit Hilfe von (18) ganz analog zum Nachweis der gleichmäßigen Beschränktheit der Operatoren $W_h(t_2, s)$, wie er bei YOSIDA [1971, a.a.O.] zu finden ist. **

5 Bemerkung:

Stärkere Glattheitsforderungen an die Operatoren $A^n(t)A^{-n}(s)$ liefern die LIPSCHITZ-Stetigkeit auch höherer Ableitungen der Lösungen.

3.2 Mehrschichtverfahren

Wir wollen uns nun der Konsistenzfrage zuwenden. Die erforderlichen Überlegungen gestatten es, dabei von dem allgemeineren Ansatz ($N \in \mathbb{N}_0$; $a_0, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$)

$$(20) \quad u^{n+1} - \sum_{j=0}^N a_j u^{n-j} = hbA(t_{n+1})u^{n+1},$$

$$(21) \quad \bigwedge_{0 \leq j \leq N} u^j = u_j$$

auszugehen, mit dem auch höhere Konsistenzordnungen erzielt werden können. Wir bezeichnen (20), (21) als "Mehrschichtverfahren". Die Gleichung (20) kann explizit geschrieben werden:

$$(22) \quad u^{n+1} = C_b(t_{n+1}) \sum_{j=0}^N a_j u^{n-j}.$$

Mehrschichtverfahren haben die Struktur linearer Mehrschrittverfahren für gewöhnliche Anfangswertprobleme. Tatsächlich lassen sich auch die bekannten Konsistenzkriterien übertragen.

6 Satz:

Seien die Voraussetzungen von Lemma 4 erfüllt und gelte $A(s) \neq 0$ für ein $s \in [0, T]$. Dann ist das Mehrschichtverfahren (20), (21) genau dann konsistent, wenn

$$(23) \quad 1 = \sum_{j=0}^N a_j \quad \text{und} \quad b = 1 + \sum_{j=0}^N j a_j.$$

Beweis:

Seien $0 \leq s < T$ und $u_s \in D(A^2(s)) \subset X$ (dicht! vgl. Korollar 2.16). Dann gilt wegen (19)

$$(24) \quad u(t+h) - C_b(t+h, h) \sum_{j=0}^N a_j u(t-jh) \\ = C_b(t+h, h) \{ u(t+h) - hb u_t(t+h) - \sum_{j=0}^N a_j u(t-jh) \}$$

$$= C_b(t+h, h) \left\{ \left(1 - \sum_{j=0}^N a_j\right) u(t) + h \left(1 - b + \sum_{j=0}^N j a_j\right) u_t(t) + r(t, h) \right\}$$

mit $r(t, h) = O(h^2)$ gleichmäßig für $t \in T_s$. Das Erfülltsein von (23) liefert somit Konsistenz. *

Um zu zeigen, daß (23) auch notwendig ist, konstruieren wir eine Lösung von (1_s) , (2_s) mit $u_s \in D(A^2(s))$ sowie $u(t) \neq 0$ und $u_t(t) \neq 0$ für ein $t \in [s, T_0)$. Wähle dazu $s \in T$ und $v_s \in D(A(s))$ mit $A(s)v_s \neq 0$. Da $D(A^2(S)) \subset X$ dicht und $A(s)$ abgeschlossen ist, gibt es hierzu auch ein $u_s \in D(A^2(s))$ mit $A(s)u_s \neq 0$. Die Abbildung $u := E(\cdot, s)u_s$ leistet dann das Gewünschte.

Wähle nun lineare Funktionale $l_0^h, l_1^h \in X^*$ mit $\|l_0^h\| = \|l_1^h\| = 1$ und $\langle l_0^h, C_b(t+h, h)u(t) \rangle = \|C_b(t+h, h)u(t)\|$ sowie $\langle l_1^h, C_b(t+h, h)u_t(t) \rangle = \|C_b(t+h, h)u_t(t)\|$ (möglich nach dem Satz von HAHN-BANACH). Wenden wir auf beide Seiten der Gleichung (24) die Funktionale l_i^h , $i = 0, 1$ an, so erhalten wir wegen der vorausgesetzten Konsistenz

$$(25) \quad \left(1 - \sum_{j=0}^N a_j\right) \langle l_i^h, C_b(t+h, h)u(t) \rangle + h \left(1 - b + \sum_{j=0}^N j a_j\right) \langle l_i^h, C_b(t+h, h)u_t(t) \rangle = o(h), \quad i = 0, 1.$$

Außerdem gilt

$$(26) \quad \bigwedge_{v_0 \in X} \lim_{h \rightarrow 0} C_b(t+h, h)v_0 = 0.$$

Bew.: O.E.d.A. sei $v_0 \in D$. Mit Satz 2.6d folgt $C_b(t+h, h)v_0 = \int_0^\infty e^{-s} E_{t+h}(hbs)v_0 ds$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle $s_0 > 0$ mit $\int_{s_0}^\infty e^{-s} ds < \epsilon$ und $h_0 > 0$ mit

$$\|E_{t+h}(k)v_0 - v_0\| \leq \| \{E_{t+h}(k) - E(t+h+k, t+h)\} v_0 \| + \|E(t+h+k, t+h)\| \|E(t+h, t)v_0 - v_0\| + \|E(t+h+k, t)v_0 - v_0\| < \frac{\epsilon}{bs_0}$$

für alle $0 < h < h_0$ und $0 \leq k \leq h$. Die Wahl von h_0 ist möglich wegen

- i. des gleichmäßigen Grenzüberganges in (17),
- ii. der gleichmäßigen Beschränktheit der Operatoren $E(t,s)$,
- iii. der Stetigkeit von $E(.,t)v_0$ für alle $v \in X$ (Beweis wie im zeitlich homogenen Fall, vgl. Bemerkung 2.4).

Wir erhalten für $0 \leq s \leq s_0$

$$\begin{aligned} \|E_{t+h}(hbs)v_0 - v_0\| &\leq \|E_{t+h}(h[bs])\| \|E_{t+h}(h(bs-[bs]))v_0 - v_0\| \\ &\quad + \sum_{i=0}^{[bs]-1} \|E_{t+h}(ih)\| \|E_{t+h}(h)v_0 - v_0\| \\ &\leq C_1(1+[bs])\frac{\epsilon}{bs_0} \leq C_2\epsilon \end{aligned}$$

mit geeigneten Konstanten $C_1, C_2 > 0$, und weiter

$$\|C_b(t+h,h)v_0 - v_0\| \leq (s_0 C_2 + C_1 \|v_0\|)\epsilon. *$$

Aus (25) und (26) ergibt sich nunmehr die Gültigkeit der Gleichungen (23). **

7 Korollar:

Unter den Voraussetzungen von Lemma 4 ist das Einschichtverfahren (8), (9) konvergent, und zwar von der Ordnung 1 für $u_s \in D(A^2(s))$.

Beweis:

Klar! **

8 Bemerkung:

Bei YOSIDA [1971, Kap. XIV.4, Satz 2] wird die Konvergenz von (8), (9) allein unter den Voraussetzungen von Satz 2 hergeleitet, jedoch ohne Angabe der Konvergenzordnung, deren Kenntnis für numerische Anwendungen von Bedeutung ist.

Um das bekannte Kriterium für höhere Konsistenzordnungen linearer Mehrschrittverfahren für gewöhnliche Anfangswert-

probleme (siehe z.B. STOER-BULIRSCH [1973, Satz 7.2.11.8]) zu übertragen, setzen wir $(\lambda \in \mathbb{R})$

$$(27) \quad \alpha(\lambda) := \lambda^{N+1} - \sum_{j=0}^N a_j \lambda^{N-j} \quad \text{und} \quad \beta(\lambda) := b \lambda^{N+1}.$$

9 Satz:

Seien die Voraussetzungen von Lemma 4 erfüllt, und seien die Operatoren $A^n(t)A^{-n}(s) \in B(X)$ hinreichend glatt, so daß die Lösungen $E(.,s)u_s$ für u_s aus einem geeigneten dichten Teilraum $G \subset X$ q -mal differenzierbar sind mit LIPSCHITZ-stetiger q -ter Ableitung. Besitzt dann die reelle Funktion $\frac{\alpha(\lambda)}{\ln(\lambda)} - \beta(\lambda)$ die Zahl 1 als q -fache Nullstelle, so ist das Schichtenverfahren (20), (21) konsistent von der Ordnung q . Diese Bedingung ist auch notwendig, falls eine Lösung u von (1_s) existiert mit $u_s \in G$ und $u^{(i)} \neq 0$ ($0 \leq i \leq q$).

Beweis:

Die Voraussetzungen gestatten es, die TAYLOR-Entwicklung (24) bis zur Ordnung $O(h^q)$ fortzusetzen. Dabei erhalten wir als Koeffizienten der h^j die gleichen Terme wie bei der entsprechenden Entwicklung im Falle linearer Mehrschrittverfahren für gewöhnliche Anfangswertaufgaben, so daß sich das bekannte Kriterium auf unser Problem übertragen läßt. *

Die Notwendigkeit der Bedingung wird ebenso wie bei Satz 6 bewiesen. **

Für zeitunabhängige Operatoren A erhalten wir

10 Korollar:

Sei das dem abgeschlossenen linearen (zeitunabhängigen) Operator A mit $D(A) \subset X$ zugeordnete Anfangswertproblem (2.1), (2.2) sachgemäß gestellt, und gelte $A^q \neq 0$. Dann ist das Mehrschichtverfahren (8), (9) genau dann konsistent

von der Ordnung q , wenn die reelle Funktion $\frac{\alpha(\lambda)}{\ln(\lambda)} - \beta(\lambda)$ die Zahl 1 als q -fache Nullstelle besitzt.

Beweis:

Der Raum $G := D(A^{q+1}) \subset X$ ist dicht (siehe HILLE-PHILLIPS [1957, Satz 10.3.4]), außerdem gilt für $u \in G$ und $i = 0, \dots, q+1$

$$\left\| \frac{d^i}{dt^i} E(t)u \right\| = \|A^i E(t)u\| = \|E(t)A^i u\| \leq \|E(t)\| \|A^i u\|.$$

Die Hinlänglichkeit folgt daher aus Satz 9. *

Sei nun $u_0 \in D(A^{q+1})$ mit $A^q u_0 \neq 0$. Dann gelten mit $u := E(\cdot)u_0$ nach Bemerkung 2.4 für hinreichend kleine t die Ungleichungen $u^{(i)}(t) = E(t)A^i u_0 \neq 0$ ($i = 0, \dots, q$), und die Notwendigkeit ergibt sich ebenfalls aus Satz 9. **

Um die Konvergenz des Mehrschichtverfahrens (8), (9) zu erhalten, benötigen wir außer der Konsistenz auch die Stabilität des Verfahrens. Anders als bei den bisher gewonnenen Ergebnissen lassen sich Stabilitätskriterien für Mehrschichtverfahren nicht mehr aufstellen, ohne auf die Eigenschaften spezieller Operatoren $A(t)$ genauer einzugehen. Wir beschränken uns deswegen bei den weiteren Untersuchungen auf elliptische Differentialoperatoren $A(t)$. Die dabei entstehenden Anfangswertprobleme (1_s) , (2_s) sind vom parabolischen Typus.

4 Das DAHLQUIST'sche Wurzelkriterium bei Mehrschichtverfahren im Falle parabolischer Differentialgleichungen

4.1 Parabolische Evolutionsgleichungen

Parabolische Differentialgleichungen sind ein wichtiges Beispiel für Evolutionsgleichungen und legen eine Behandlung im Rahmen der Halbgruppentheorie linearer Operatoren nahe. Entscheidend für die Aussagekraft der Ergebnisse ist natürlich die Wahl des Raumes $(X, \|\cdot\|)$. Um später die aus numerischen Gründen erwünschte Konvergenz der Schichtenverfahren bezüglich der Maximumnorm zu erhalten, erklären wir den B-Raum

$$X := C(\mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\mathbb{R}^m), \quad \|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$$

und führen hierauf gleichmäßig elliptische Differentialoperatoren $A(t)$ ein ($t \in T := [0, T_0]$). Setze

$$D := \{u \in X \mid \bigwedge_{j \in \mathbb{N}_0^m, |j| \leq 2} \partial^j u \in X\}.$$

Dabei ist wie üblich für $j := (j_1, \dots, j_m) \in \mathbb{N}_0^m$

$$|j| := \sum_{i=1}^m |j_i| \quad \text{und} \quad \partial^j := \partial^{|j|} / \partial x_1^{j_1} \dots \partial x_m^{j_m}.$$

Ist $\xi \in \mathbb{R}^m$, so erklären wir $\xi^j := \prod \xi^{j_i}$.

Setze für $u \in D$

$$\bigwedge_{t \in T} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}^m} (F(t)u)(x) := \sum_{|j| \leq 2} A_j(x, t) \partial^j u(x),$$

wobei die Koeffizienten A_j stetig partiell nach x und t differenzierbar seien und mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$ folgenden Bedingungen genügen mögen:

$$(1) \quad \bigwedge_{|j| \leq 2} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}^m, t \in T, |i| \leq 2} |\partial^j A_i(x, t)| \leq C,$$

$$(2) \quad \bigwedge_{|j| \leq 2} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}^m, t \in T, |i| \leq 2} |\partial^j \frac{\partial}{\partial t} A_i(x, t)| \leq C.$$

Außerdem sei die gleichmäßige Elliptizitätsbedingung

$$(3) \quad \bigvee_{c>0} \bigwedge_{t \in T; x, \xi \in \mathbb{R}^m} \sum_{|j|=2} A_j(x, t) \xi^j \geq c \xi^2$$

erfüllt.

1 Lemma:

Die Operatoren $\{F(t)\}$ sind abschließbar und im Falle $m = 1$ abgeschlossen.

Beweis:

1. Abschließbarkeit: Sei $\{u_n\} \subset D$ eine Nullfolge mit $F(t)u_n \rightarrow w \in X$, und sei $F^*(t)$ der zu $F(t)$ formal adjungierte Operator. Dann gilt für beliebige $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)^1)$

$$\int_{\mathbb{R}^m} w g \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} F(t)u_n g \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} u_n F^*(t)g \, dx = 0,$$

und damit $w = 0$. *

2. Abgeschlossenheit im Falle $m = 1$: Zunächst bemerken wir, daß für alle $u \in X$ mit $u'' \in X$ bereits $u \in D$ und

$$(4) \quad \bigwedge_{r>0} \|u'\| \leq r \|u''\| + \frac{2}{r} \|u\|$$

gilt (siehe z.B. KATO [1966, Kap. IV, Beispiel 1.6]). Sei nun $\{u_n\} \subset D$ mit $u_n \rightarrow u \in X$ und $F(t)u_n \rightarrow w \in X$. Mit Hilfe von (1), (3) und (4) erhalten wir für $k, n \in \mathbb{N}$ und $0 < \kappa < cC^{-1}$

$$(5) \quad \|u_k'' - u_n''\| \leq (1 - \kappa c^{-1}C)(c^{-1}\|F(t)(u_k - u_n)\| + (1+2/\kappa)c^{-1}C\|u_k - u_n\|),$$

die Folge $\{u_n''\}$ konvergiert also gegen ein $v \in X$. Es gilt

$$u_n(x) = \int_0^x \int_0^z u_n''(y) \, dy \, dz + a_n + b_n x,$$

und die Grenzwerte $a := \lim a_n = u(0)$ und $b := \lim b_n = u(1) - \int_0^1 \int_0^z v(y) \, dy \, dz - a$ existieren. Hieraus folgt

¹⁾ $C_0^\infty(\mathbb{R}^m) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \mid \text{supp}(f) \text{ kompakt}\}.$

$$u(x) = \int_0^x \int_0^z v(y) \, dy \, dz + a + bx$$

und $u'' = v \in X$, und damit $u \in D$. Mit (1) und (5) folgt schließlich

$$\begin{aligned} \|F(t)u - w\| &= \lim \|F(t)u - F(t)u_n\| \\ &\leq C \lim \{2\|u'' - u_n''\| + 3\|u - u_n\|\} = 0, \end{aligned}$$

also auch $F(t)u = w = \lim F(t)u_n$. **

Wir setzen nun $A(t) := \overline{F}(t)$ und betrachten die Anfangswertprobleme

$$(6_s) \quad \frac{d}{dt}u(t) = A(t)u(t), \quad t \in T_s,$$

$$(7_s) \quad u(s) = u_s.$$

Es ist zu erwarten, daß die Lösungen von (6_s) , (7_s) auch Lösungen des gleichmäßig parabolischen Anfangswertproblems

$$(8_s) \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \sum A_j(x,t) \frac{\partial^j}{\partial x^j}u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad s < t \leq T_0,$$

(7_s) liefern. Die Umkehrung dieses Sachverhalts ist dagegen mit Sicherheit nicht richtig, da (7_s) , (8_s) für jedes $u_s \in X$ genau eine Lösung $\Phi_s(u_s, \cdot, t) \in X$ besitzt (siehe z.B. FRIEDMAN [1964, Kap. 1.6 und 1.7, insbesondere Satz 12]), während die Definitionsbereiche $D(A(t)) \subset X$ wegen des Graphensatzes (closed graph theorem) echte Teilräume sind und (6_s) , (7_s) deswegen für keinen der Anfangswerte $u_s \in X \setminus D(A(s)) \neq \emptyset$ eine Lösung besitzen kann.

Setze $E(t,s)u_s := \Phi_s(u_s, \cdot, t)$ für $u_s \in X$. Wir werden im folgenden zeigen, daß - unter einigen zusätzlichen Voraussetzungen - die Anfangswertprobleme (6_s) , (7_s) sachgemäß gestellt sind und damit die Operatoren $\{E(t,s)\}$ als verallgemeinerte Lösungsoperatoren besitzen. Jedes gegen die verallgemeinerten Lösungsoperatoren von (6_s) , (7_s) konvergente Verfahren konvergiert somit auch gegen die ursprüng-

lich gesuchten Lösungen Φ_S von $(8_S), (7_S)$.

Wir untersuchen zunächst die Operatoren $(rId - A(t))^{-1}$. Soweit bei diesen Überlegungen die zeitliche Variable t unwesentlich ist, werden wir sie unterdrücken und A an Stelle von $A(t)$ sowie $A_j(x)$ an Stelle von $A_j(x, t)$ schreiben.

2 Lemma:

Sei $a := \sup \{A_0(x) \mid x \in \mathbb{R}^m\} < r$. Dann gilt:

$$\bigwedge_{u \in D(A)} (A - rId)u \leq 0 \Rightarrow u \geq 0.$$

Beweis:

Indirekt, Annahme: Es gelte $(A - rId)u \leq 0$ und $u(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Wir werden auf eine geeignete Summe $v = u + w$ mit $\|w\| \rightarrow \infty$ für $\|x\| \rightarrow \infty$ das Minimumprinzip anwenden und einen Widerspruch herleiten. Wähle $p > 0$ mit $p^2 m^2 C + pmC + a - r < 0$ (C aus (1)) und setze für $\epsilon > 0$

$$v_\epsilon(x) := u(x) + \epsilon w(x) := u(x) + \epsilon e^{p\|x-x_0\|_1} \quad (x \in \mathbb{R}^m).$$

Es gilt für $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{x_0\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} w(x) &= \text{sign}(x_1 - x_0) p w(x), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_1} w(x) &= \text{sign}(x_k - x_0) \text{sign}(x_1 - x_0) p^2 w(x) \end{aligned}$$

und daher

$$(A - rId)w(x) \leq (p^2 m^2 C + pmC + a - r)w(x) < 0.$$

Wir können damit das Minimumprinzip auf v_ϵ anwenden ¹⁾ und erhalten wegen $v_\epsilon(x_0) < 0$ für $\epsilon < |u(x_0)|$

$$\bigwedge_{0 < \epsilon < |u(x_0)|} \bigwedge_{x \neq x_0} v_\epsilon(x) > v_\epsilon(x_0)$$

¹⁾ Man beachte, daß das Minimumprinzip natürlich auch im Falle $m = 1$ gültig ist.

und weiter

$$\bigwedge_{x \neq x_0} u(x) \geq u(x_0).$$

Dies steht im Widerspruch zum Minimumprinzip - jetzt auf die Funktion u angewandt - wonach u kein negatives Minimum besitzen darf. **

3 Korollar:

Seien a und r wie in Lemma 2. Dann besitzt die gleichmäßig elliptische Differentialgleichung

$$(9) \quad \sum A_j(x) \partial^j u(x) - ru(x) = z(x)$$

für $z \in X$ höchstens eine Lösung $u \in X$, d.h. der Operator $(rId - A)$ ist injektiv.

Beweis:

Klar! **

4 Korollar:

Seien a und r wie in Lemma 2, und sei $u \in X$ eine Lösung der Differentialgleichung (9). Dann gilt

$$(10) \quad \|u\| \leq (r-a)^{-1} \|z\|,$$

d.h. $\|(rId-A)^{-1}\| \leq (r-a)^{-1}$.

Beweis:

Setze $v := u + (r-a)^{-1} \|z\|$. Hierfür gilt $(A - rId)v \leq z - \|z\| \leq 0$, also nach Lemma 2 $v \geq 0$, d.h. $-u \leq (r-a)^{-1} \|z\|$. Setzen wir nun $v := -u + (r-a)^{-1} \|z\|$, so erhalten wir $u \leq (r-a)^{-1} \|z\|$, und insgesamt folgt (10). **

Korollar 4 ist im Hinblick auf die Stabilitätsforderung (3.13) von Interesse.

5 Lemma:

Seien a und r wie in Lemma 2. Dann ist der Wertebereich $R(rId - A) \subset X$ ein dichter Teilraum.

Beweis:

Wir zeigen, daß (9) für jedes $z \in X$ mit gleichmäßig beschränkten stetigen ersten partiellen Ableitungen eine Lösung $u \in D$ besitzt.

1. $m \geq 2$: Sei G die erste Fundamentallösung von $A - rId$ ("principal fundamental solution", siehe GIRAUD [1932, S. 294 - 301] oder MIRANDA [1970, Kap. III.20]). Dann gilt mit einer geeigneten Konstanten $q > 0$

$$G(x, y) = O(e^{-q\rho}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} G(x, y) = O(e^{-q\rho}),$$

jeweils für $\rho := \|x - y\| \rightarrow \infty$. Die Abbildung

$$(11) \quad u(x) := \int_{\mathbb{R}^m} G(x, y) z(y) dy$$

ist somit eine beschränkte Lösung von $(A - rId)u = z$.

BRAMBLE und PAYNE [1964] geben unter den von uns getroffenen Voraussetzungen lokale Schranken für die partiellen Ableitungen $\partial^j u$ ($|j| \leq 2$) an, die nur von $\|u\|_{K(x, r)}$ und $\|\sum_{i,j=1}^m \partial/\partial x_i (A_{i,j}(\cdot) \partial/\partial x_j u)\|_{K(x, r)}$ abhängen ($\|u\|_K := \sup \{|u(x)| : x \in K\}$). Jeder dieser beiden Terme läßt sich weiter abschätzen: $\|u\|_{K(x, r)} \leq \|u\|$ und

$$(12) \quad \left\| \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{i,j}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x_j} u) \right\|_{K(x, r)} \leq \|(A - rId)u\| + C_1 \sum_{|j| \leq 1} \|\partial^j u\| \leq C_2 \|z\|$$

mit geeigneten Konstanten $C_1, C_2 \geq 0$. Die zweite Ungleichung in (12) ergibt sich aus

$$|\partial^j u(x)| \leq \|z\| \int_{\mathbb{R}^m} |\partial^j G(x, y)| dy \quad (|j| \leq 1).$$

Insgesamt folgt $u \in D$. *

2. $m = 1$ (o.E.d.A. sei $A_2(\cdot) = 1$): Durch (12) wird auch

in diesem Fall eine beschränkte Lösung u von (9) erklärt, wobei wir allerdings die Existenz der ersten Fundamentallösung erst nachweisen müssen. Dies kann aber nahezu wörtlich wie im Falle $m \geq 2$ geschehen, wobei (mit den Bezeichnungen von MIRANDA [1970, a.a.O.]) $L(x,y) := -(2r)^{-1} \exp(-r|x-y|)$ zu setzen ist. Wir haben noch die Beschränktheit der Ableitungen u' und u'' zu zeigen. Aus (4) folgt analog zur Ungleichung (5)

$$(13) \quad \|u''\| \leq (1-\kappa c^{-1}(C+r))(c^{-1}\|z\| + (1+(1+2/\kappa)c^{-1}(C+r)\|u\|)) < \infty$$

für $0 < \kappa < c(C+r)^{-1}$ und damit unter erneuter Ausnutzung von (4) auch $\|u'\| < \infty$, insgesamt also $u \in D$. **

Wir fassen die bisher gewonnenen Ergebnisse zusammen:

6 Satz:

Sei $a := \max \{0, \sup\{A_0(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^m, t \in T\}\}$. Dann gilt

- a. A ist abgeschlossen,
- b. $(a, +\infty) \subset \rho(A)$,
- c. $\bigwedge_{0 < h < a^{-1}} R(r, A) = (r \text{Id} - A)^{-1} \in B(X)$, und
- d. $\bigwedge_{0 < h < a^{-1}} \|(\text{Id} - hA)^{-1} \| \leq (1 - ah)^{-1}$.

Beweis:

Klar! **

Sind die Operatoren $A = A(t)$ zeitunabhängig, so ist nach den Ergebnissen aus Abschnitt 2 das Anfangswertproblem (6), (7) sachgemäß gestellt und das Einschichtverfahren konvergent.

Bei zeitabhängigen Operatoren $A(t)$ müssen wir uns noch den Forderungen (3.12), (3.14-16) und (3.18) zuwenden. Ist $m = 1$, so besitzen die Operatoren $A(t) = F(t)$ von t unabhängige Definitionsbereiche (siehe Lemma 1). Im Falle $m \geq 2$ ist dies im allgemeinen nicht mehr richtig.

7 Lemma:

Sind die Hauptteile $F^{(o)}(t) := \sum_{|j|=2} \dot{A}_j(x,t) \partial^j$ der Operatoren $F(t)$ von der Gestalt

$$(14) \quad F^{(o)}(t) = \alpha(t) \sum_{|j|=2} A_j(x) \partial^j$$

mit $\alpha \in C^1(T)$, $\alpha > 0$ und von t unabhängigen Koeffizienten $A_j(x)$ ($|j| = 2$), so besitzen die Operatoren $A(t)$ auch im Falle $m \geq 2$ von t unabhängige Definitionsbereiche.

Beweis:

Wir werden zeigen, daß

$$(15) \quad \bigwedge_{t \in T} D(\overline{\sum_{|j|=2} A_j(x) \partial^j}) = D(A(t)).$$

Dazu halten wir t fest und nehmen o.E.d.A. $\alpha(t) = 1$ an. Sei G_k die erste Fundamentallösung von $F^{(o)} - k^2 \text{Id} = 0$. Für $u \in D$ und mit $z_k := (F^{(o)} - k^2 \text{Id})u \in X$ gilt dann

$$|u(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^m} G_k(x,y) z_k(y) dy \right| \leq \|z_k\| \int_{\mathbb{R}^m} |G_k(x,y)| dy$$

und

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right| = \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^m} G_k(x,y) z_k(y) dy \right| \leq \|z_k\| \int_{\mathbb{R}^m} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} G_k(x,y) \right| dy.$$

Beh.: Es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} |G_k(x,y)| dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} G_k(x,y) \right| dy = 0$$

gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}^m$.

Bew.: Ist L_k die erste Fundamentallösung von $\Delta - k^2 \text{Id}^1$, so genügt G_k der Integralgleichung (siehe MIRANDA [1970, Kap. III.20]):

$$G_k(x,y) = L_k(x,y) + \int_{\mathbb{R}^m} G_k(x,t) K_k(t,y) dt$$

mit

¹) $\Delta := \text{LAPLACE-Operator.}$

$$K_k(x, y) := \sum_{|j|=2} (A_j(x) - A_j(y)) \partial^j L_k(x, y)$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} |L_k(x, y)| dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} |K_k(x, y)| dy = 0$$

gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}^m$. Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^m} |G_k(x, y)| dy \leq (1 - \sup_{t \in \mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} |K_k(t, y)| dy)^{-1} \int_{\mathbb{R}^m} |L_k(x, y)| dy \rightarrow 0$$

und ebenso $\int |\partial^j G_k(x, y)| dy \rightarrow 0$ ($|j| = 1$), jeweils gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}^m$. *

Für ein geeignetes $k > 0$ gilt also

$$\|\sum_{|j| \leq 1} A_j(x, t) \partial^j u(x)\| < \delta \|z_k\|$$

mit $\delta < 1$, so daß der Operator $\sum_{|j| \leq 1} A_j(x, t) \partial^j$ relativ $F^{(0)} - k^2 \text{Id}$ beschränkt ist mit einer relativen Schranke $\delta < 1$. Wir können nun den Stabilitätssatz von KATO für abschließbare Operatoren heranziehen (siehe KATO [1966, Kap. IV, Satz 1.1]) und folgern, daß die Definitionsbereiche der abgeschlossenen Operatoren $\overline{F^{(0)} - k^2 \text{Id}}$ und $\overline{F(t) - k^2 \text{Id}}$ übereinstimmen. Wegen $D(\overline{F^{(0)} - k^2 \text{Id}}) = D(F^{(0)})$ und $D(\overline{F(t) - k^2 \text{Id}}) = D(A(t))$ folgt daraus die Gleichheit (15). **

8 Bemerkung:

Die in Lemma 7 genannten Voraussetzungen an den Hauptteil $F^{(0)}(t)$ sind wegen unserer aus numerischen Gründen getroffenen Wahl des Raumes $(X, \|\cdot\|)$ erforderlich. Im Falle $X = L^2(\mathbb{R}^m)$ beispielsweise sind die Definitionsbereiche $D(A(t))$ auch ohne die zusätzlichen Forderungen aus Lemma 7 von t unabhängig.

Wir wollen nun die Glattheitsforderungen (3.14-16) und (3.18) beweisen, wobei wie immer $r > a = \sup A_0(x, t)$ sei.

1. Fall: $m = 1$. Sei $u := (r \text{Id} - A(s))^{-1} z \in D(A(t)) = D$. Mit (4), (10) und (13) folgt $\|u\|, \|u'\|, \|u''\| \leq \text{const } \|z\|$. Wir

erhalten

$$\frac{d}{dt}(rId - A(t))u = \frac{\partial}{\partial t}A_2(\cdot, t)u'' + \frac{\partial}{\partial t}A_1(\cdot, t)u' + \frac{\partial}{\partial t}A_0(\cdot, t)u$$

und unter Berücksichtigung von (2)

$$\|B(t, s)\| \leq \text{const} \cdot |t - s| \cdot \|z\|.$$

Ist $u := (rId - A(s))^{-2}z$, so gilt $\|u^{(i)}\| \leq \text{const} \cdot \|z\|$,
 $i = 0, \dots, 4$ und wir erhalten

$$\frac{d}{dt}(rId - A(t))^2u = \frac{d}{dt}A^2(t)u - 2r\frac{d}{dt}A(t)u,$$

wobei für den ersten Term der rechten Seite

$$\frac{d}{dt}A^2(t)u = \sum_{i,j=0}^2 \frac{\partial}{\partial t} \{ A_i(x, t) \frac{\partial^i}{\partial x^i} A_j(x, t) u^{(j)}(x) \}$$

gilt. Mittels (2) folgt auch die Gültigkeit von (3.18).

2. Fall: $m \geq 2$. Dieser Fall wird analog behandelt, die Abschätzung $\|\partial^j u\| \leq \text{const} \cdot \|z\|$ folgt hier wieder aus BRAMBLE, PAYNE [1964].

Wir haben nun alle Voraussetzungen nachgewiesen und können die Ergebnisse des letzten Abschnitts auf das Problem (6) (7) anwenden. Insbesondere erhalten wir, daß es sachgemäß gestellt ist und das Einschichtverfahren konvergiert (Satz 3.6 und Korollar 3.7).

Höhere Glattheitsforderungen an die Koeffizienten A_j liefern auch die (gleichmäßige) LIPSCHITZ-Stetigkeit höherer Ableitungen der Lösungen (vgl. Bemerkung 3.5), so daß wir ohne weiteres in der Lage sind, mit Hilfe von Satz 3.9 höher konsistente Verfahren zu konstruieren. Die Stabilität solcher Verfahren werden wir im nächsten Teil dieses Abschnitts untersuchen.

4.2 Das DAHLQUIST'sche Wurzelkriterium

Auf die formale Ähnlichkeit der Mehrschichtverfahren (3.20) mit linearen Mehrschrittverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen haben wir bereits hingewiesen. Wir werden nun zeigen, daß sich im Falle parabolischer Evolutionsgleichungen auch das DAHLQUIST'sche Wurzelkriterium übertragen läßt und eine hinreichende Bedingung für Stabilität liefert. Die Bedingung lautet:

- (16) Sämtliche Wurzeln des Polynoms α (siehe (3.27)) bis auf eine liegen im Innern des Einheitskreises, die verbleibende ist 1.

Die Forderung ist etwas schärfer als die ursprünglich von DAHLQUIST [1956] formulierte, für die Anwendung ist diese Verschärfung jedoch unerheblich.

WIDLUND [1965], [1966] betrachtet Differenzenapproximationen für (8), (7), die von der gleichen Bauart sind wie die Mehrschichtverfahren (3.20), und beweist die Hinlänglichkeit des Wurzelkriteriums (16) für Stabilität. Dabei zeigt er zunächst, daß Differenzenapproximationen, die der Bedingung (16) genügen, parabolisch sind. Aus der Parabolizität der Differenzenapproximationen folgert er in einem zweiten Schritt die Stabilität des Verfahrens. Wir werden diese Unterteilung übernehmen und ähnlich wie WIDLUND [1966] vorgehen.

Zunächst schreiben wir das Verfahren (3.20) formal in ein Einschrittverfahren um:

$$\begin{aligned}
 (17) \quad \tilde{u}^{n+1} &= \begin{bmatrix} (\text{Id} - h\mathbf{b}A(t_{n+1}))^{-1} & & & \\ & \text{Id} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \text{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \text{Id}, \dots, a_N \text{Id} \\ \text{Id} \\ \vdots \\ \text{Id}, 0 \end{bmatrix} \tilde{u}^n \\
 &=: \tilde{C}_0(t_{n+1}, h) \tilde{F}u^n =: \tilde{C}(t_{n+1}, h) \tilde{u}^n
 \end{aligned}$$

wobei wir $\tilde{u}^n := (u^n, \dots, u^{n-N}) \in X^{N+1}$ gesetzt haben.

Setze

$$(F^{(o)}(y,t)u)(x) := \sum_{|j|=2} A_j(y,t) \partial^j u(x)$$

und $A^{(o)}(y,t) := \overline{F}^{(o)}(y,t)$. Ersetzen wir in (17) die Operatoren $A(t)$ durch $A^{(o)}(y,t)$, so sollen die dabei entstehenden Matrizen entsprechend mit $\tilde{C}_0^{(o)}(y,t,h)$ und $\tilde{C}^{(o)}(y,t,h)$ bezeichnet werden. Desgleichen setzen wir $C^{(o)}(y,t,h) := (\text{Id} - hA^{(o)}(y,t))^{-1}$.

Wir werden y zunächst festhalten, um FOURIER-Transformationen durchführen zu können und Abschätzungen für die iterierten Operatoren $\Pi \tilde{C}_0^{(o)}(y, t_i, h)$ zu gewinnen. Mit der LEVI'schen Parametrixmethode gelangen wir dann auch zu Abschätzungen für die Operatoren $\Pi \tilde{C}(t, h)$. Für die Anwendung von FOURIER-Transformationen benötigen wir

9 Lemma:

Sei $X_0 := X \cap C_0(\mathbb{R}^m)$. Dann gilt

$$\left\| \prod_{i=k}^1 C(t_i, h) \right\|_{X_0} = \left\| \prod_{i=k}^1 C(t_i, h) \right\|.$$

Beweis:

Sei $z \in X$ und $\varphi_r \in C^\infty(\mathbb{R}^m, [0,1])$ mit $\varphi_r|_{K(0,r)} = 1$ und $\varphi_r|_{\mathbb{R}^m \setminus K(0,2r)} = 0$. Setze $z_{x,r}(y) := \varphi_r(x-y)z(y)$, also $z_{x,r} \in X_0$. Ist dann G_t die erste Fundamentallösung von $hA(t) - \text{Id} = 0$, so folgt

$$C(t, h)z_{x,r}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_r(x-y) G_t(x, y) z(y) dy \rightarrow C(t, h)z(x)$$

für $r \rightarrow \infty$, und damit $\|C(t, h)\|_{X_0} = \|C(t, h)\|$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} C(t_2, h)C(t_1, h)z_{x,r}(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_r(x-y) z(y) \int_{\mathbb{R}^m} G_{t_2}(x, y') G_{t_1}(y', y) dy' dy \\ &\rightarrow C(t_2, h)C(t_1, h)z(x) \quad \text{für } r \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

also auch $\|C(t_2, h)C(t_1, h)\|_{X_0} = \|C(t_2, h)C(t_1, h)\|$. Durch

vollständige Induktion erhalten wir schließlich die Behauptung. **

Wir setzen nun

$$\hat{A}(x, t, \xi) := \sum_{|j| \leq 2} A_j(x, t) (i\xi)^j,$$

und

$$\hat{A}^{(0)}(x, t, \xi) := \sum_{|j|=2} A_j(x, t) (i\xi)^j.$$

10 Lemma:

Für gleichmäßig LIPSCHITZ-stetiges $z \in X_0$ gilt ($0 < k < 1$, $t_1 \in T$, $w := h^{-\frac{1}{2}} \xi$)

$$\prod_{j=k}^1 C^{(0)}(y, t_j, h) z(x) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x - \xi, t_1, y, t_{k-1}, h) z(\xi) d\xi$$

mit

$$g(x, t_1, y, t_{k-1}, h) := (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{ixw} \prod_{j=k}^1 (1 + b\hat{A}^{(0)}(y, t_j, \xi))^{-1} dw.$$

Beweis:

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \hat{z}(w) &= (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-iwx} z(x) dx \quad 1) \\ &= (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-iwx} \prod_{j=k}^1 (\text{Id} - b h A^{(0)}(y, t_j)) \prod_{j=k}^1 C^{(0)}(y, t_j, h) z(x) dx \\ &= \prod_{j=k}^1 (1 + b\hat{A}^{(0)}(y, t_j, \xi)) \left\{ \prod_{j=k}^1 C^{(0)}(y, t_j, h) z \right\}^{\wedge}(w). \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\left\{ \prod_{j=k}^1 C^{(0)}(y, t, h) z \right\}^{\wedge}(w) = (2\pi)^{m/2} \hat{g}(w) \hat{z}(w) = (g * z)^{\wedge}(w)$$

und hieraus folgt unmittelbar die Behauptung. **

Setze

¹⁾ $\hat{z} :=$ FOURIER-Transformierte von z .

$$\hat{C}_0(x, t, \xi) := \begin{bmatrix} (1 - b\hat{A}(x, t, \xi))^{-1} & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{F} := \begin{bmatrix} a_0, \dots, a_N \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1, 0 \end{bmatrix}$$

und $\hat{C}(x, t, \xi) := \hat{C}_0(x, t, \xi)\hat{F}$. Wird $\hat{A}$ durch $\hat{A}^{(0)}$ ersetzt, so bezeichnen wir die entstehenden Matrizen entsprechend mit $\hat{C}_0^{(0)}(x, t, \xi)$ und $\hat{C}(x, t, \xi)$.

11 Korollar (vgl. WIDLUND [1966, (3.4)]):

Für gleichmäßig LIPSCHITZ-stetiges $\tilde{z} \in X_0^{N+1}$ gilt ($1-k \geq N+1$, $0 < k < 1$, $t_1 \in T$, $h > 0$ hinreichend klein, $\beta \in \mathbb{R}^m$):

$$(18) \quad \prod_{j=k}^1 \tilde{C}^{(0)}(y, t_j, h) \tilde{z}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} G^{(0)}(x - \xi, t_1, y, t_{k-1}, h) \tilde{z}(\xi) d\xi$$

mit

$$\begin{aligned} G^{(0)}(x, t_1, y, t_{k-1}, h) &:= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{ixw} \prod_{j=k}^1 \hat{C}^{(0)}(y, t_j, \xi) dw \\ &= (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{ix(w+i\beta)} \prod_{j=k}^1 \hat{C}^{(0)}(y, t_j, \xi + ih \frac{1}{2} \beta) dw \\ &= (2\pi)^{-m} e^{-x\beta} \int_{\mathbb{R}^m} e^{ixw} \prod_{j=k}^1 \hat{C}^{(0)}(y, t_j, \xi + ih \frac{1}{2} \beta) dw. \end{aligned}$$

Beweis:

Klar! **

Wir werden im folgenden Abschätzungen für die komplexen Matrizen $\prod \hat{C}^{(0)}(x, t_j, \zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$ herleiten. Vermöge (18) erhalten wir dann auch Schranken für die Operatoren $\prod \tilde{C}^{(0)}(y, t_j, h)$.

Die Produkte $\hat{F}^n$, $n \in \mathbb{N}$ sind gleichmäßig beschränkt, wenn die Eigenwerte von F der Wurzelbedingung (16) genügen. Wir müssen zeigen, daß sich daran für die "gestörten" Matrizen $\hat{C}(x, t, \zeta)$ nichts ändert. Seien also $\kappa(x, t, \zeta)$ deren Eigenwerte. Es sind genau die Wurzeln der Gleichung

$$(19) \quad \kappa^{N+1} (1 - b\hat{A}^{(0)}(x, t, \zeta)) - \sum_{j=0}^N a_j \kappa^j = 0.$$

12 Lemma:

Ist die Wurzelbedingung (16) erfüllt, so gilt für alle Eigenwerte $\kappa(x, t, \xi)$ in einer hinreichend kleinen Nullumgebung $U \subset \mathbb{R}^m$ und mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$

$$\bigwedge_{(x, t) \in \mathbb{R}^m \times T, \xi \in U} |\kappa(x, t, \xi)| \leq 1 - C\xi^2.$$

Beweis:

Seien $\kappa_2, \dots, \kappa_N$ die Wurzeln von α , die im Innern des Einheitskreises liegen, und $\kappa_1 = 1$ die verbleibende. Setze $2\epsilon := 1 - \max\{|\kappa_j| \mid 2 \leq j \leq N\}$. Da die Wurzeln von (19) stetig von ξ abhängen gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $0 \leq |\xi| < \delta$ genau $N - 1$ Wurzeln im Innern des Kreises $K(0, 1-\epsilon) \subset \mathbb{C}$ liegen und die N -te Wurzel $\kappa_1(\xi)$ in $K(1, \epsilon) \subset \mathbb{C}$. Wir brauchen deswegen die obige Ungleichung nur für $\kappa_1(\xi)$ zu beweisen.

Für α und $F(\lambda, \xi) := \alpha(\lambda) - \xi\lambda^{N+1}$ gilt

- i. $\alpha(\lambda) = 0 \Rightarrow |\lambda| < 1$ oder $\lambda = 1$,
- ii. $\alpha'(1) \neq 0$, da $\lambda = 1$ einfache Nullstelle,
- iii. $\alpha'(1) > 0$, da $\alpha(\lambda) \rightarrow \infty$ für $\lambda \rightarrow +\infty$,
- iv. $F_\lambda(\lambda, \xi)|_{(1, 0)} = \alpha'(1) > 0$, $F_\xi(\lambda, \xi)|_{(1, 0)} = -1 < 0$.

Die Gleichung $F(\lambda(\xi), \xi) = 0$ besitzt somit in einer geeigneten Nullumgebung $V \subset \mathbb{R}$ eine differenzierbare Lösung λ , und es gilt

$$\begin{aligned} \lambda(\xi) &= \lambda(0) + \xi\lambda'(0) + O(\xi^2) \\ &= 1 + \xi/\alpha'(1) + O(\xi^2). \end{aligned}$$

Für hinreichend kleine $|\xi|$ folgt $\kappa_1(\xi) = \lambda(\hat{b}^{(0)}(\xi))$ und damit

$$(20) \quad \kappa_1(\xi) = 1 + \hat{b}^{(0)}(\xi)/\alpha'(1) + O(\xi^4) \leq 1 - C\xi^2. \quad **$$

13 Lemma:

Die Eigenwerte $\kappa(x, t, \xi)$ genügen für hinreichend große $|\xi|$ mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$ folgender Ungleichung:

$$\bigwedge_{(x, t) \in \mathbb{R}^m \times T} |\kappa(x, t, \xi)|^{N+1} \leq \frac{1}{(1+C\xi^2)}.$$

Beweis:

Es gilt $|\kappa(x, t, \xi)| \rightarrow +\infty$ für $|\xi| \rightarrow +\infty$, gleichmäßig in $(x, t) \in \mathbb{R}^m \times T$. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \kappa(\xi)^{-(N+1)} \sum_{j=0}^N a_j \kappa(\xi)^j &= 1 - \hat{b}^{(0)}(x, t, \xi) \\ &\geq 1 + c\xi^2 \end{aligned}$$

(c aus (3)). Für hinreichend große $|\xi|$ gilt somit

$$|\kappa(\xi)|^{N+1} = \left| \frac{\sum_{j=0}^N a_j \kappa(\xi)^j}{1 - \hat{b}^{(0)}(\xi)} \right| \leq \frac{C_1}{1+c\xi^2} \leq \frac{1}{1+C_2\xi^2} \quad . \quad **$$

14 Satz (vgl. WIDLUND [1965, Satz 1]):

Sei die Wurzelbedingung (16) erfüllt und gelte für alle Eigenwerte

$$(21) \quad \bigwedge_{(x, t) \in \mathbb{R}^m \times T} \bigwedge_{\xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}} |\kappa(x, t, \xi)| < 1.$$

Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß

$$(22) \quad \bigwedge_{\xi \in \mathbb{R}^m} |\kappa(x, t, \xi)|^{N+1} \leq \frac{1}{1-C\xi^2}.$$

Beweis:

Klar! **

Die Beziehung (22) entspricht der Parabolizitätsbedingung für Differenzenapproximationen (siehe z.B. WIDLUND [1966, (2.4)]). Nach Satz 14 sind also das Wurzelkriterium (16)

und die Bedingung (21) hinreichend für die Parabolizität des Schichtenverfahrens.

Wir wollen nun die Abschätzung (22) auf komplexe $w \in \mathbb{C}$ ausdehnen. Dazu setzen wir $\mathbb{C}_\epsilon^m := \{z \in \mathbb{C} \mid \|\operatorname{Im} z\| < \epsilon\}$.

15 Korollar:

Seien die Voraussetzungen von Satz 14 erfüllt. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Nullumgebung $U \subset \mathbb{R}^m$ mit

$$a. \bigwedge_{\zeta := \xi + i\eta \in \mathbb{C}_\epsilon^m, \zeta \in U} |\kappa(x, t, \zeta)| \leq 1 - C_1 \xi^2 + C_2 \eta^2,$$

$$b. \bigwedge_{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}_\epsilon^m} |\kappa(x, t, \zeta)|^{N+1} \leq \frac{1}{1 + C_1 \xi^2 - C_2 \eta^2},$$

jeweils mit geeigneten Konstanten $C_1, C_2 > 0$.

Beweis:

1. Zum Nachweis von a. beschränken wir uns wieder auf den Eigenwert $\kappa_1(\zeta) \in K(1, \epsilon) \subset \mathbb{C}$ (vgl. den Beweis von Lemma 12) und erhalten aus (20) für hinreichend kleine $|\zeta|$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \kappa(\zeta) &= 1 + \{b\hat{A}^{(0)}(\xi) - b\hat{A}^{(0)}(\eta) + O(\xi\eta)\} \alpha'(1)^{-1} + O(\xi^2 \eta^2) \\ &\leq 1 - C_0 \xi^2 + C_1 \eta^2 + C_2 |\xi\eta| + O(\xi^2 \eta^2). \end{aligned}$$

Wähle $\delta > 0$ mit $\delta C_0 < C_2$. Dann folgt

$$\begin{aligned} i. \text{ für } |\xi| \leq \delta |\eta|: \quad \kappa(\zeta) &\leq 1 - C_0 \xi^2 + (C_1 + \delta C_2) \eta^2 + O(\xi^2 \eta^2), \\ ii. \text{ für } |\xi| \geq \delta |\eta|: \quad \kappa(\zeta) &\leq 1 - (C_0 - \delta^{-1} C_2) \xi^2 + C_1 \eta^2 + O(\xi^2 \eta^2). \quad * \end{aligned}$$

2. Wegen des bereits bewiesenen Teils a. sowie wegen (21) genügt es, b. nur für hinreichend große $|\xi|$ zu zeigen. Dies geschieht aber analog zum Beweis von Lemma 13. **

Wir benötigen den Stabilitätssatz von KREISS [1962], den wir in folgender Fassung von WIDLUND [1965], [1966] angeben:

16 Lemma:

Sei $\mathfrak{F}$ eine Familie von $n \times n$ -Matrizen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a. $\bigvee_{C>0} \bigwedge_{F \in \mathfrak{F}} \bigwedge_{j \in \mathbb{N}} \|A^j\| < C,$
- b. $\bigvee_{C>0} \bigwedge_{|s|<1} \bigwedge_{F \in \mathfrak{F}} \|(Id - sF)^{-1}\| < C(1 - |s|)^{-1},$
- c. $\bigvee_{C>0} \bigwedge_{F \in \mathfrak{F}} \bigvee_{H \in \mathbb{C}^{(n,n)}} \text{hermitesch und positiv definit:}$
 - (i) $C^{-1}Id \leq H \leq CId,$
 - (ii) $F^t H F \leq (1 - \rho)F, \quad \rho := \frac{1}{2} \min (1 - |\kappa_i|), \quad \kappa_i \text{ i-ter Eigenwert von } F.$

Beweis:

Siehe KREISS [1962]. **

17 Lemma (vgl. WIDLUND [1966, Lemma 3.3]):

Seien die Voraussetzungen von Satz 14 erfüllt. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß mit geeigneten Konstanten $C_1, C_2, C_3 > 0$

$$(23) \bigwedge_{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}} \bigwedge_{y \in \mathbb{R}^m} \bigwedge_{k, l \in \mathbb{N}, k < l, t_1 \in T} \\ \left\| \prod_{j=k}^l C^{(0)}(y, jh, \zeta) \right\| \leq C_1 e^{C_2 n^2 (1-k+1)} (1 + C_3 \xi^2)^{-(1-k+1)/(N+1)}$$

gilt.

Beweis:

Für den Beweis setzen wir $\zeta := \xi + i\eta$, sowie mit C_1, C_2 aus Korollar 5

$$F(y, t, \zeta) := (1 + C_1 \xi^2)^{1/(N+1)} e^{-2C_2 n^2} \hat{C}^{(0)}(y, t, \zeta).$$

Nahezu wörtlich wie bei WIDLUND [1965] kann unter Verwendung von Korollar 15a gezeigt werden, daß für eine geeignete Nullumgebung $U \subset \mathbb{C}$ die Menge

$$\mathfrak{F}(U) := \{F(y, t, \zeta) \mid \zeta \in U\}$$

die Eigenschaft b. aus Lemma 16 besitzt.

Wird $\epsilon > 0$ hinreichend klein gewählt und ist $\zeta \in \mathbb{C} \setminus U$,

so gilt wegen des Korollars 15 b für die Eigenwerte $\kappa_F(\zeta)$

$$|\kappa_F(\zeta)|^{N+1} \leq (1+C_1\eta^2-C_2\eta^2)^{-1}(1+C_1\eta^2)e^{-2(N+1)C_2\eta^2} < 1.$$

Damit genügt die Menge $\mathfrak{F}(\mathbb{C}_\epsilon \setminus U)$ der Bedingung a. des Lemmas 16.

Insgesamt folgt, daß die Menge $\mathfrak{F}_\epsilon := \mathfrak{F}(\mathbb{C}_\epsilon)$ die Eigenschaft c. des Lemmas besitzt (gegebenenfalls muß ϵ dazu nochmals verkleinert werden). Wir fahren wie bei WIDLUND [1966, a.a.O.] im Beweis fort. Sei $F(y, t, \zeta) \in \mathfrak{F}_\epsilon$ und gemäß Lemma 16

$$\overline{F}^t(y, t, \zeta) H(y, t, \zeta) F(y, t, \zeta) \leq (1 - \rho(y, t, \zeta)) H(y, t, \zeta).$$

Unter Ausnutzung der gleichmäßigen Stetigkeit von $F(y, t, \zeta)$ und $\rho(y, t, \zeta)$ in t folgt die Existenz eines $\delta > 0$ mit

$$\bigwedge_{y \in \mathbb{R}^m, t_0 \in T, \zeta \in \mathbb{C}^m} \bigwedge_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap T} F^t(y, t, \zeta) H(y, t_0, \zeta) F(y, t, \zeta) \leq H(y, t_0, \zeta).$$

Sei $\|\cdot\|_{H(y, t_0, \zeta)}$ die von $H(y, t_0, \zeta)$ induzierte äquivalente Norm auf $\mathbb{C}^m$:

$$\|x\|_{H(y, t_0, \zeta)}^2 := \overline{x}^t H(y, t_0, \zeta) x.$$

Bezüglich dieser Norm sind die Matrizen $F(y, t, \zeta)$, $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap T$ durch 1 beschränkt, und wir erhalten mit $C > 0$ aus Lemma 16 c

$$\left\| \prod_{t_0 - \delta \leq jh \leq t_0 + \delta} F(jh) \right\| \leq C \left\| \prod_{t_0 - \delta \leq jh \leq t_0 + \delta} F(jh) \right\|_{H(y, t_0, \zeta)} \leq C$$

und damit

$$\left\| \prod_{j=k}^1 F(jh) \right\| \leq C^{[(t_1 - t_k + h)/2\delta] + 1} \leq C^{[T_0/2\delta] + 1}.$$

Die Gültigkeit von (23) folgt nun unmittelbar. **

Korollar 11 und Lemma 17 liefern

18 Satz (vgl. WIDLUND [1966, Satz 3.1]):

Seien die Voraussetzungen von Satz 14 erfüllt. Dann gibt es Konstanten $h_0, C_1, C_2 > 0$, so daß

$$(24) \bigwedge_{0 < h < h_0} \bigwedge_{x, y \in \mathbb{R}^m} \bigwedge_{\beta \in \mathbb{R}^m} \bigwedge_{k, l \in \mathbb{N}, l-k > N+1} \\ |G^{(0)}(x, t_1, y, t_k, h)| \leq C_1 (t_1 - t_k + h)^{-m/2} e^{C_2 \beta^2 (t_1 - t_k + h) - x \beta}$$

Beweis:

Es gilt ($w := h^{-\frac{1}{2}} \xi$, $K := K(0, 1) \subset \mathbb{R}^m$)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} (1 + C_3 \xi^2)^{-(l-k+1)/(N+1)} dw &= h^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} (1 + C_3 \xi^2)^{-(l-k+1)/(N+1)} d\xi \\ &\leq C_4 (t_1 - t_k + h)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m \setminus K} (1 + C_3 \xi^2)^{-(N+2)/(N+1)} d\xi \\ &\quad + C_4 h^{-m/2} \int_K e^{-C_3 \xi^2 (l-k+1)/(N+1)} d\xi \\ &\leq C_5 (t_1 - t_k + h)^{-m/2}. \end{aligned}$$

Die Gültigkeit von (24) ergibt sich damit aus Korollar 11 und Lemma 17. **

Satz 18 liefert in Verbindung mit Korollar 11 die Stabilität der Operatoren $\{\tilde{G}^{(0)}(y, t, h)\}$.

19 Korollar:

Sind die Voraussetzungen von Satz 14 erfüllt, dann gibt es Konstanten $h_0, C > 0$, so daß

$$(25) \bigwedge_{y \in \mathbb{R}^m} \bigwedge_{0 < h < h_0} \bigwedge_{k, l \in \mathbb{N}, k < l, t_l \in T} \\ \left\| \prod_{j=k}^l \tilde{G}^{(0)}(y, t_j, h) \right\| < C.$$

Beweis:

Setze $\beta := \beta(x) := (t_1 - t_k + h)^{-\frac{1}{2}} (\text{sign}(x_1), \dots, \text{sign}(x_m)) \in$

$\mathbb{R}^m$ und verwende (18) sowie (24). **

Auf die Stabilität der Operatoren $\{\tilde{C}(t, h)\}$ schließen wir mit der LEVI'schen Parametrixmethode. Der Ansatz lautet in unserem Fall

$$(26) \quad \prod_{j=k}^1 \tilde{C}(t_j, h) = \prod_{j=k}^1 \tilde{C}^{(0)}(0, t_j, h) + \sum_{j=k}^1 \left\{ \prod_{i=j+1}^1 \tilde{C}^{(0)}(0, t_i, h) \right\} Z(t_j, t_{k-1}, h).$$

Gesucht werden beschränkte lineare Operatoren $Z(t_i, t_j, h) \in B(X)$, die den Gleichungen (26) genügen.

20 Lemma:

Unter den Voraussetzungen von Satz 14 stimmen die beschränkten linearen Lösungen von (26) mit denen der äquivalenten Gleichungen

$$(27) \quad Z(t_1, t_{k-1}, h) = \{\tilde{C}(t_1, h) - \tilde{C}^{(0)}(0, t_1, h)\} \prod_{j=k}^1 \tilde{C}^{(0)}(0, t_j, h) + \sum_{j=k}^1 \{\tilde{C}(t_1, h) - \tilde{C}^{(0)}(0, t_1, h)\} \left\{ \prod_{i=j+1}^1 \tilde{C}^{(0)}(0, t_i, h) \right\} Z(t_j, t_{k-1}, h)$$

überein.

Beweis:

"(26) $\Rightarrow$ (27)": Lösen die Operatoren $Z(t_i, t_j, h) \in B(X)$ die Gleichungen (26), so gilt

$$0 = \{\tilde{C}(t_1, h) - \tilde{C}^{(0)}(0, t_1, h)\} \prod_{j=k}^{1-1} \tilde{C}^{(0)}(0, t_j, h) - Z(t_1, t_{k-1}, h) + \sum_{j=k}^{1-1} \{\tilde{C}(t_1, h) - \tilde{C}^{(0)}(0, t_i, h)\} Z(t_j, t_{k-1}, h). *$$

"(27) $\Rightarrow$ (26)": Bew. durch vollständige Induktion. **

21 Lemma:

Sind die Voraussetzungen von Satz 14 erfüllt, dann gibt es Konstanten $h_0, C > 0$, so daß

$$(28) \bigwedge_{0 < h < h_0} \bigwedge_{t \in T} \|\tilde{C}(t, h) - \tilde{C}^{(0)}(0, t, h)\| < hC.$$

Beweis:

Sei $\tilde{z} = (z_0, \dots, z_N) \in X^{N+1}$ mit gleichmäßig beschränkten stetigen ersten partiellen Ableitungen. Aus dem Beweis von Lemma 5 folgt $u_i := (\text{Id} - hA^{(0)}(0, t))^{-1} z_i \in D$ und $\|\partial^j u_i\| \leq C_1(\|u_i\| + \|z_i\|) \leq C_2\|z_i\|$ ($0 \leq i \leq N$, $|j| \leq 2$) mit von $\tilde{z}$ unabhängigen Konstanten $C_1, C_2 > 0$. Wegen der Voraussetzungen (1) folgt

$$\begin{aligned} & \| \{ \tilde{C}(t, h) - \tilde{C}^{(0)}(0, t, h) \} \tilde{z} \| \leq \\ & \leq C_3 \left\| \left\{ \text{Id} - \begin{bmatrix} (\text{Id} - hA(t))(\text{Id} - hA^{(0)}(0, t))^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\} \tilde{F} \tilde{z} \right\| \\ & \leq hC_4 \left\| \{ A(t) - A^{(0)}(0, t) \} (\text{Id} - hA^{(0)}(0, t))^{-1} \sum_{i=0}^N a_i z_i \right\| \\ & \leq hC_5 \sum_{i=0}^N \| \{ A(t) - A^{(0)}(0, t) \} u_i \| \leq hC_6 \|\tilde{z}\|. \quad ** \end{aligned}$$

Die Lösungen von (26) bzw. (27) lassen sich damit explizit angeben.

22 Lemma:

Seien die Voraussetzungen von Satz 14 erfüllt. Dann sind die Gleichungen (26) bzw. (27) für hinreichend kleine $h > 0$ lösbar und es gilt

$$(29) \quad Z(t_1, t_{k-1}, h) = \sum_{i \geq 0} Z^{(i)}(t_1, t_{k-1}, h)$$

mit

$$Z^{(0)}(t_1, t_{k-1}, h) := \{ \tilde{C}(t_1, h) - \tilde{C}^{(0)}(0, t_1, h) \} \prod_{j=k}^1 \tilde{C}^{(0)}(0, t_j, h)$$

und

$$Z^{(i+1)}(t_1, t_{k-1}, h) := \sum_{j=k}^1 Z^{(0)}(t_1, t_j, h) Z^{(i)}(t_j, t_{k-1}, h).$$

Die Lösungen $Z(t_1, t_{k-1}, h)$ sind gleichmäßig beschränkt:

$$(30) \quad \|Z(t_1, t_{k-1}, h)\| \leq h C e^{C(t_1 - t_k)}.$$

Beweis:

Wegen (25) und (28) gilt $\|Z^{(0)}(t_1, t_{k-1}, h)\| \leq hC$. Es folgt

$$\|Z^{(1)}(t_1, t_{k-1}, h)\| \leq \sum_{j=k}^1 h^2 C^2 = h(t_1 - t_k + h)C^2$$

und für die höheren Glieder

$$\|Z^{(i)}(t_1, t_{k-1}, h)\| \leq h(t_1 - t_k + h)^i \frac{C^{i+1}}{i!},$$

also

$$\|\Sigma Z^{(i)}(t_1, t_{k-1}, h)\| \leq h \sum_{i=0}^{\infty} (t_1 - t_k + h)^i \frac{C^{i+1}}{i!} = h C e^{C(t_1 - t_k + h)}.$$

Es ist klar, daß die durch (29) erklärten Operatoren $Z(t_1, t_{k-1}, h)$ den Gleichungen (27) und damit auch den Gleichungen (26) genügen. **

23 Bemerkung:

Mit Hilfe der Operatoren $Z(t_1, t_{k-1}, h)$ lassen sich die Fundamentallösungen $G(x, t_1, t_k, h)$ der Operatoren $\tilde{H}(t_j, h)$ explizit angeben:

$$\begin{aligned} G(x, t_1, t_{k-1}, h) &= G^{(0)}(x, t_1, 0, t_{k-1}, h) \\ &+ \sum_{j=k}^1 G^{(0)}(x, t_1, 0, t_j, h) Z(t_j, t_{k-1}, h). \end{aligned}$$

Wir können jetzt die Hinlänglichkeit der DAHLQUIST'schen Wurzelbedingung für die Stabilität der Operatoren $\{\tilde{C}(t, h)\}$ beweisen.

24 Satz:

Sind die Voraussetzungen von Lemma 7 erfüllt und genügen die Eigenwerte $\kappa(\xi)$ der Forderung (21), dann ist die Wurzelbedingung (16) hinlänglich für die Stabilität der Operatoren $\{\tilde{C}(t, h)\}$.

Beweis:

Wegen (25), (26) und (30) gilt

$$\begin{aligned} \|\tilde{C}(t, h)\| &\leq C + hC^2 \sum_{j=k}^1 e^{C(t_j - t_k + h)} \\ &\leq C + C^2(t_1 - t_k + h)e^{C(t_1 - t_k + h)}. \quad ** \end{aligned}$$

25 Korollar:

Unter den Voraussetzungen des Satzes 23 und bei erfüllter Wurzelbedingung (16) sind auch die Operatoren $\{\partial^j \Pi \tilde{C}(t_1, h)\}$, $|j| \leq 1$ gleichmäßig beschränkt.

Beweis:

Sei $\tilde{z} \in X_0^{N+1}$ gleichmäßig LIPSCHITZ-stetig. Nach Korollar 11 gilt dann ($|j| = 1$)

$$\partial^j \Pi_{q=k}^1 \tilde{C}^{(0)}(y, t_q, h) \tilde{z} = \int_{\mathbb{R}^m} \partial^j G^{(0)}(x - \xi, t_1, y, t_{k-1}, h) \tilde{z}(\xi) d\xi$$

und

$$\begin{aligned} |\partial^j G^{(0)}(x, t_1, y, t_{k-1}, h)| &\leq \\ &\leq (2\pi)^{-m} e^{-x\beta} \int (|\beta| + |w|) \Pi_{q=k}^1 C^{(0)}(y, t_q, \xi + ih \frac{1}{2}\beta) dw. \end{aligned}$$

Damit geht die Ungleichung (24) über in

$$\begin{aligned} |\partial^j G^{(0)}(x, t_1, y, t_{k-1}, h)| &\leq \\ &\leq C_1(t_1 - t_k + h)^{-(m+1)/2} e^{C_2\beta^2(t_1 - t_k + h) - x\beta}, \end{aligned}$$

wobei hier allerdings $h^{\frac{1}{2}}|\beta| \leq \text{const.}$ sein muß. Eine nahezu wörtliche Wiederholung der weiteren Überlegungen liefert jetzt die gleichmäßige Beschränktheit der Operatoren $\{\partial^j \Pi \tilde{C}^{(0)}(y, t_1, h)\}$ und $\{\partial^j \Pi \tilde{C}(t_1, h)\}$. **

26 Bemerkung:

Satz 23 und Korollar 24 lassen sich auf Mehrschichtverfahren bei parabolischen Rand-Anfangswertproblemen, die auf

einem beschränkten Gebiet $R \subset \mathbb{R}^m$ gestellt sind, nicht unmittelbar anwenden. Eine Ausdehnung der Stabilitätssätze auf diese für die Praxis wichtige Problemklasse ist jedoch leicht möglich. Es genügt zu fordern, daß die Koeffizienten $A_j \in C(E)$ so auf den ganzen Raum $\mathbb{R}^m$ fortgesetzt werden können, daß die Bedingungen (1-3) erfüllt werden. Mit den so erweiterten Koeffizienten können wir ein Anfangswertproblem der Form (6), (7) bzw. (8), (7) erklären, auf das sich unsere Überlegungen anwenden lassen. Insbesondere erhalten wir die Fundamentallösungen $G(x, t_1, t_k)$, wenn die Voraussetzungen des Stabilitätssatzes 24 erfüllt sind (siehe Bemerkung 23). Es ist möglich, die Lösungen u^n des Schichtenverfahrens für das Randwertproblem mit diesen Fundamentallösungen darzustellen. Wir machen dazu den Ansatz

$$(31) \quad u^n(x) = \int_E G(x-\xi, t_n, 0, h) u^0(\xi) d\xi \\ + \sum_{j=1}^n \int_{\partial E} G(x-\xi, t_n, t_{j-1}, h) \varphi(\xi, t_j) d\xi,$$

wobei die Funktion $\varphi \in C(\partial E)$ zu bestimmen ist. Die Beziehung (31) entspricht dem Ansatz, mit dem im kontinuierlichen Fall Lösungen von parabolischen Randwertproblemen bestimmt werden (siehe z.B. FRIEDMAN [1964, Kap. 5.3]). Mit den gleichen Überlegungen wie bei FRIEDMAN [1964, a.a.O.] können wir auf die Existenz der Funktion φ und deren gleichmäßige Beschränktheit schließen. Die Stabilität des Schichtenverfahrens für das Randwertproblem ist eine unmittelbare Folge.

Ein Beispiel für ein stabiles Zweischichtverfahren zweiter Konsistenzordnung liefert

27 Satz:

Seien die Forderungen (1-3) und (14) erfüllt. Dann ist das Zweischichtverfahren

$$(32) \quad u^{n+1} - \frac{1}{3} (4u^n - u^{n-1}) = \frac{2}{3} h A(t_{n+1}) u^{n+1}$$

stabil und von zweiter Ordnung konsistent.

Beweis:

Mit den Bezeichnungen von (3.20), (3.21) gilt $N = 1$,
 $a_0 = \frac{4}{3}$, $a_1 = -\frac{1}{3}$ und $b = \frac{2}{3}$, also

$$\alpha(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{3}) \quad \text{und} \quad \beta(\lambda) = \frac{2}{3}\lambda^2.$$

Die Konsistenzordnung ergibt sich daher aus Satz 3.9. *
 Die Eigenwerte von F sind $\kappa_1 = 1$ und $\kappa_2 = \frac{1}{3}$, die Wurzelbedingung (16) ist somit erfüllt. Die Wurzeln $\kappa(\xi)$ ($\xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$) von (19) berechnen sich zu

$$\kappa_{1,2}(\xi) = \frac{1}{3} (1 - \frac{2}{3} A^{(0)}(\xi))^{-1} (2 \pm (1 + 2A^{(0)}(\xi))^{\frac{1}{2}}).$$

Es folgt

1. für $0 \leq 1 + 2A^{(0)}(\xi) \leq 1$:

$$\kappa_{1,2}(\xi) \leq (1 + \frac{2}{3} c A^{(0)}(\xi))^{-1} < 1$$

(mit c aus (3)).

2. für $1 + 2A^{(0)}(\xi) < 0$:

$$|\kappa_{1,2}(\xi)|^2 = (3 - 2A^{(0)}(\xi))^{-2} (4 + |1 + 2A^{(0)}(\xi)|) \\
= (3 - 2A^{(0)}(\xi))^{-2} (3 - 2A^{(0)}(\xi)) \leq (3 + 2c\xi^2)^{-1} < 1.$$

Damit ist auch die Forderung (21) erfüllt, und Satz 24 liefert die Stabilität des Verfahrens (32). **

28 Bemerkung:

Das Mehrschichtverfahren (32) ist ein von zweiter Ordnung konvergentes Verfahren für eine, sehr allgemeine parabolische Differentialgleichung. Die Durchführung des Verfahrens erfordert bei jedem Schritt die Lösung einer elliptischen Differentialgleichung, wofür aber - wenigstens bei Randwertproblemen auf beschränkten Gebieten - erprobte Verfahren

zur Verfügung stehen.

Durch die angenäherte Berechnung der u^{n+1} aus (32), oder allgemeiner aus (3.20), kommen zum Verfahrensfehler weitere Fehler hinzu. Wegen der Linearität der Schichtenverfahren gehen diese Fehler aber nur additiv in den Gesamtfehler ein, so daß die Konvergenz und die Konvergenzordnung erhalten bleiben, wenn die Gleichungen (32) bzw. (3.20) hinreichend genau gelöst werden. Die Genauigkeit, mit der die Gleichungen zu lösen sind, muß entsprechend der Konsistenzordnung erhöht werden, wenn h verkleinert wird. Dieses gegenüber zusätzlichen "Rundungsfehlern" weitgehend unempfindliche Konvergenzverhalten wird "stabile Konvergenz" genannt, vgl. z.B. ANSORGE [1969].

5 Numerische Beispiele

Gegeben sei das Rand - Anfangswertproblem

- $$\begin{aligned}
 (1) \quad & \bigwedge (x,t) \in [0,1]^2 \quad u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u, \\
 (2) \quad & \bigwedge x \in [0,1] \quad u(x,0) = u_0(x), \\
 (3) \quad & \bigwedge t \in [0,1] \quad l_1 u(0,t) + l_2 u_x(0,t) = 0, \\
 (4) \quad & \bigwedge t \in [0,1] \quad r_1 u(1,t) + r_2 u_x(1,t) = 0.
 \end{aligned}$$

Von den Koeffizienten a, b, c nehmen wir an, daß sie auf $\mathbb{R} \times [0,1]$ fortsetzbar seien und diese Fortsetzungen den Bedingungen (4.1 - 3) genügen. Außerdem sei $l_1^2 + l_2^2 \neq 0$ und $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$. Setze

$$\begin{aligned}
 L &:= \begin{cases} C[0,1] & \text{falls } l_2 \neq 0, \\ \{u \in C[0,1] \mid u(0) = 0\} & \text{falls } l_2 = 0, \end{cases} \\
 R &:= \begin{cases} C[0,1] & \text{falls } r_2 \neq 0, \\ \{u \in C[0,1] \mid u(1) = 0\} & \text{falls } r_2 = 0, \end{cases}
 \end{aligned}$$

und

$$X := L \cap R, \quad \|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty.$$

Für $t \in T$ erklären wir die abgeschlossenen linearen Operatoren $A(t) : D_A := X \cap C^2[0,1] \rightarrow X$ durch

$$\bigwedge u \in D_A \quad A(t)u := a(\cdot, t)u_{xx} + b(\cdot, t)u_x + c(\cdot, t)u$$

und erhalten die sachgemäß gestellten Anfangswertprobleme

$$(5_s) \quad \frac{d}{dt} u(t) = A(t)u(t), \quad t \in [s, 1],$$

$$(6_s) \quad u(s) = u_s.$$

Es ist klar, daß die verallgemeinerten Lösungen von (5_s) , (6_s) gerade die Lösungen des Randwertproblems (1 - 4) liefern.

Für einige Testbeispiele wurden die Lösungen von (5_s) , (6_s)

mit dem Einschichtverfahren

$$(7) \quad u^{n+1} - u^n = hA(t_{n+1})u^{n+1}$$

und dem Zweischichtverfahren

$$(8) \quad u^{n+1} - \frac{1}{2}(4u^n - u^{n-1}) = \frac{2}{3}hA(t_{n+1})u^{n+1}$$

berechnet. Die Konvergenz des Einschichtverfahrens (7) folgt unmittelbar aus Korollar 3.7. Die Konvergenz des Zweischichtverfahrens (8) ergibt sich aus Satz 27 unter Berücksichtigung von Bemerkung 26.

Die Differenzengleichungen (7) und (8) liefern Systeme gewöhnlicher Randwertprobleme, die sukzessive gelöst werden können. Die einzelnen Randwertprobleme sind von der Form

$$(9) \quad au_{xx} + bu_x + cu = f,$$

$$(10) \quad l_1u(0) + l_2u_x(0) = r_1u(1) + r_2u_x(1) = 0.$$

Für die numerische Behandlung ist es zweckmäßig, die Gleichung (9) in ein System zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung umzuformen:

$$(11) \quad u_x = v, \quad v_x = -a^{-1}(bv + cu) + a^{-1}f,$$

$$(12) \quad l_1u(0) + l_2v(0) = r_1u(1) + r_2v(1) = 0.$$

Die Lösungen von (11), (12) wurden mit dem Verfahren des "multiple shooting" berechnet (siehe z.B. STOER - BULIRSCH [1973, Kap. 7.3.]), und die dabei auftretenden Anfangswertprobleme mit der verallgemeinerten Mittelpunktsregel und einmaliger Extrapolation gelöst (siehe BULIRSCH - STOER [1966]). Die auf diese Weise berechneten Lösungen von (11), (12) sind an jeder zweiten Stützstelle von vierter Ordnung genau. Um auch an den übrigen Stützstellen Genauigkeiten vierter Ordnung zu erhalten, wurden diese Werte durch HERMITE - Extrapolation bestimmt. Die Durchführung der Extrapolation ist deswegen erforderlich, weil die Lösungen beim

Übergang auf die nächst höhere Zeitschicht in die rechte Seite der Differentialgleichungen (9) eingehen. Als Startwert u^1 wurde beim Zweischichtverfahren jeweils die exakte Lösung u von (1-4) auf der Zeitschicht $t = t_1 = h$ gewählt, also $u^1 = u(.,h)$.

Folgende Rand - Anfangswertprobleme wurden für die Testrechnungen verwendet:

$$\text{I} \quad \begin{cases} u_t = 0.1 u_{xx}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \exp(0.1\pi^2) \sin \pi x. \end{cases}$$

Exakte Lösung: $u(x,t) = \exp(0.1\pi^2(1-t)) \sin \pi x$.

$$\text{II} \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + \frac{1}{2}(2x-1)u_x - (2x^2 - 2x - \frac{1}{2})u, \\ u(0,t) - u_x(0,t) = 0, \\ u(1,t) + u_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \exp(\frac{3}{4} + x(1-x)). \end{cases}$$

Exakte Lösung: $u(x,t) = \exp(\frac{3}{4} + x(1-x) - t)$.

$$\text{III} \quad \begin{cases} u_t = 0.1(1+t^2)u_{xx}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin \pi x. \end{cases}$$

Exakte Lösung: $u(x,t) = \exp(-(0.1)^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{t^3}{3})t) \sin \pi x$.

Die numerischen Resultate sind auf den nächsten Seiten wiedergegeben. Um einen Vergleich mit bekannten Verfahren zu ermöglichen, wurden die Testprobleme auch mit dem Verfahren von KELLER [1971] berechnet¹⁾, das bei nur von x abhängigen Koeffizienten a, b, c von zweiter Ordnung konvergiert.

¹⁾ Das dabei verwendete ALGOL - Programm fertigte Herr T. Krieger an, dem ich dafür herzlich danke.

In den Tabellen bezeichnen

h = Schrittweite in t -Richtung,

k = Schrittweite in x -Richtung (Diskretisierung
zur Lösung der gewöhnlichen Anfangswertprobleme),

sh = Anzahl der beim Verfahren des multiple shooting
verwendeten Zielpunkte.

Angegeben werden die relativen Fehler $\|u(t_n) - u^n\| \|u(t_n)\|^{-1}$
auf der Zeitschicht $t = t_n = 1$ und die benötigten Rechen-
zeiten.

Die Rechnungen wurden an der Rechenanlage TELEFUNKEN -
TR 440 des LEIBNIZ-Rechenzentrums der Bayerischen Akade-
mie der Wissenschaften, München durchgeführt.

PROBLEM I

1. Einschichtverfahren

t_n	n	h	k	sh	rel. Fehler	Rechenzeit
1.00	10	1/10	1/40	1	4.62'-2	0.41 sec
1.00	20	1/20	1/40	1	2.13'-2	0.80 sec
1.00	40	1/40	1/80	1	1.08'-2	2.57 sec
1.00	80	1/80	1/160	2	5.89'-3	12.99 sec

2. Zweischichtverfahren

t_n	n	h	k	sh	rel. Fehler	Rechenzeit
1.00	10	1/10	1/40	1	4.14'-3	0.41 sec
1.00	20	1/20	1/80	1	1.11'-3	1.75 sec
1.00	40	1/40	1/160	2	2.84'-4	6.77 sec
1.00	80	1/80	1/320	2	9.28'-5	25.28 sec

3. Verfahren von KELLER

t_n	n	h	k	rel. Fehler	Rechenzeit
1.00	10	1/10	1/20	4.77'-3	0.58 sec
1.00	20	1/20	1/40	1.20'-3	1.54 sec
1.00	40	1/40	1/80	3.02'-4	5.58 sec
1.00	80	1/80	1/160	7.57'-5	21.83 sec

PROBLEM II

1. Einschichtverfahren

t_n	h	h	k	sh	rel. Fehler	Rechenzeit
1.00	10	1/10	1/20	1	4.78'-2	0.29 sec
1.00	20	1/20	1/20	1	2.38'-2	0.56 sec
1.00	40	1/40	1/30	1	1.18'-2	1.37 sec
1.00	80	1/80	1/40	1	5.49'-3	3.20 sec

2. Zweischichtverfahren

t_n	n	h	k	sh	rel. Fehler	Rechenzeit
1.00	10	1/10	1/40	1	3.07'-3	0.39 sec
1.00	20	1/20	1/80	1	8.06'-4	1.33 sec
1.00	40	1/40	1/160	1	2.05'-4	4.63 sec
1.00	80	1/80	1/240	1	4.57'-5	14.13 sec

3. Verfahren von KELLER

t_n	n	h	k	rel. Fehler	Rechenzeit
1.00	10	1/10	1/20	1.21'-3	0.67 sec
1.00	20	1/20	1/40	3.05'-4	1.75 sec
1.00	40	1/40	1/80	7.65'-5	5.73 sec
1.00	80	1/80	1/160	1.92'-5	24.04 sec

PROBLEM III

1. Einschichtverfahren

t_n	n	h	k	sh	rel. Fehler	Rechenzeit
1.00	10	1/10	1/40	1	6.20'-2	0.44 sec
1.00	20	1/20	1/40	1	3.16'-2	0.88 sec
1.00	40	1/40	1/80	1	1.51'-2	2.84 sec
1.00	80	1/80	-	-	-	-

2. Zweischichtverfahren

t_n	n	h	k	sh	rel. Fehler	Rechenzeit
1.00	10	1/10	1/80	1	7.02'-4	0.68 sec
1.00	20	1/20	1/160	1	1.80'-4	2.45 sec
1.00	40	1/40	1/320	1	4.82'-5	12.46 sec
1.00	80	1/80	-	-	-	-

3. Verfahren von KELLER

t_n	n	h	k	rel. Fehler	Rechenzeit
1.00	10	1/10	1/20	4.24'-2	0.55 sec
1.00	20	1/20	1/40	2.29'-2	1.55 sec
1.00	40	1/40	1/80	1.19'-2	5.58 sec
1.00	80	1/80	-	-	-

Literatur

- ANSORGE, R. [1969]: Problemorientierte Hierarchie von Konvergenzbegriffen bei der numerischen Lösung von Anfangswertaufgaben. Math. Z. 112, 13 - 22, 1969.
- und R. HASS [1970]: Konvergenz von Differenzenverfahren für lineare und nichtlineare Anfangswertaufgaben. Lecture Notes in Mathematics 159. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1970.
- ARONSON, D. G. [1963a]: The stability of finite difference approximations to second order linear parabolic differential equations. Duke Math. J. 30, 117 - 128, 1963.
- [1963b]: On the stability of certain finite difference approximations to parabolic systems of differential equations. Numer. Math. 5, 118 - 137 (correction: 290), 1963.
- BEREZIN, I. S. und N. P. ZHIDKOV [1965]: Computing methods, vol. II. Oxford u. a.: 1965.
- BRAMBLE, J. H. und L. E. PAYNE [1964]: Bounds for derivatives in elliptic boundary value problems. Pacific J. Math. 14, 777 - 782, 1964.
- BULIRSCH, R. und J. STOER [1966]: Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods. Numer. Math. 8, 1 - 13, 1966.
- DAHLQUIST, G. [1956]: Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations. Math. Scand. 4, 33 - 53, 1956.
- FRIEDMAN, A. [1964]: Partial differential equations of parabolic type. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall 1964.
- GIRAUD, G. [1932]: Généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptique. Bull. Sci. Math. 56, 248 - 272, 281 - 312 und 316 - 352, 1932.

- HILLE, E. und R. S. PHILLIPS [1957]: Functional analysis and semi-groups. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc. 1957.
- JOHN, F. [1952]: On integration of parabolic equations by difference methods. Comm. Pure Appl. Math. 5, 155 - 211, 1952.
- KATO, T. [1953]: Integration of the equation of evolution in a Banach space. J. Math. Soc. Japan 5, 208 - 234, 1953.
- [1956]: On linear differential equations in Banach spaces. Comm. Pure Appl. Math. 9, 479 - 486, 1956.
- [1966]: Perturbation theory for linear operators. New York: Springer 1966.
- und H. TANABE [1962]: On the abstract evolution equation. Osaka Math. J. 14, 107 - 133, 1962.
- KELLER, H. B. [1971]: A new difference scheme for parabolic problems, in: Numerical solution of partial differential equations II. New York - London: Academic Press 1971.
- KREISS, H.-O. [1962]: Über die Stabilitätsdefinition für Differenzengleichungen, die partielle Differentialgleichungen approximieren. Nordisk Tidskr. Informations-Behandling 2, 153 - 181, 1962.
- LAX, P. D. und R. D. Richtmyer [1956]: Survey of the stability of linear finite difference equations. Comm Pure Appl. Math. 9, 267 - 293, 1956.
- LISKOVETS, O. A. [1965]: The method of lines (review), (russisch), Differentsial'nye Uravneniya 1, 1662 - 1678, 1965. Engl: Differential Equations 1, 1308 - 1323, 1965.
- MIRANDA, C. [1970]: Partial differential equations of elliptic type. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1970.

- RICHTMYER, R. D. und K. W. Morton [1967]: Difference Methods for initial-value problems. New York - London - Sidney: Interscience Publishers 1967.
- ROTHER, E. [1930]: Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben. Math. Ann. 102, 650 - 670, 1930.
- STOER, J. und R. BULIRSCH [1973]: Einführung in die Numerische Mathematik II. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1973.
- WIDLUND, O. B. [1965]: On the stability of parabolic difference schemes. Math. Comp. 19, 1 - 13, 1965.
- [1966]: Stability of parabolic difference schemes in the maximum norm. Numer. Math. 8, 186 - 202, 1966.
- YOSIDA, K. [1965]: Time dependent evolution equations in a locally convex space. Math. Ann. 162, 83 - 86, 1965.
- [1971]: Functional analysis. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1971.

Lebenslauf

Geburtsdatum: 2. Februar 1947

Geburtsort: Hamburg

Schulbildung: 1953 - 1957 Städt. Volksschule, Bonn

1957 - 1958 Beethoven - Gymnasium, Bonn

1958 - 1963 Deutsche Schule, Madrid

1963 - 1966 Stiftung Landerziehungsheim
Schondorf am Ammersee,
Schondorf

Juli 1966 Reifeprüfung

Studium: WS 1966/67 - SS 1971 Universität München

Juni 1971 Diplom - Hauptexamen im Fach
Mathematik

Tätigkeit: ab Juli 1971 Verwalter einer wissenschaft-
lichen Assistentenstelle am
Mathematischen Institut der
Universität München (Lehrstuhl
Prof. Dr. G. Hämmerlin)

